Guía didáctica

conect@ *estrategias*

Matemáticas 3

sm

Dirección de contenidos y servicios educativos: Elisa Bonilla Rius
Gerencia de publicaciones escolares: Felipe Ricardo Valdez González
Autores: Melisa Vivanco, Erika Barquera Pedraza, Emilio Domínguez Bravo,
José Cruz García Zagal, Edgar García Manrique
Coordinación editorial: Ernesto Manuel Espinosa Asuar
Edición: Cristóbal Bravo Marván, Macbeth Baruch Rangel Orduña, Uriel Jiménez Herrera
Coordinación de corrección: Abdel López Cruz
Corrección: Laura Martínez García, Juana Moreno Armendáriz
Dirección de arte y diseño: Quetzatl León Calixto
Diseño de portada y de la serie: Brenda López Romero
Diseño gráfico y diagramación: Maricarmen Martínez Muñoz
Coordinación de diagramación: Jesús Arana Trejo
Producción: Carlos Olvera, Víctor Canto

Guía didáctica. Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias
Primera edición, 2014

Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, México, D. F.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx
ISBN 978-607-24-0336-9
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Guía didáctica. Matemáticas 3. Secundaria.
Conect@ Estrategias
se terminó de imprimir en enero de 2014,
en Editorial Impresora Apolo, S. A. de C. V.,
Centeno núm. 150, local 6, col. Granjas Esmeralda,
C. P. 09810, México, D. F.

En SM reconocemos que el aprendizaje por competencias requiere transformar las prácticas de enseñanza y contar con recursos didácticos para aprovechar una temática de interés para los estudiantes. Asimismo, implica tener a la mano información que favorezca nuevas formas de aprender los contenidos; establecer vínculos con los contenidos de otras asignaturas, y favorecer la interacción respetuosa.

Poner en práctica estas acciones en clase requiere que el docente tenga claro el aprendizaje que se espera del estudiante; que reconozca el contexto (la historia de la localidad, las prácticas y costumbres, las tradiciones, el carácter urbano de dicho sitio, el clima, la flora y la fauna) para integrarlos a la situación específica de aprendizaje; y gestionar la interacción con los estudiantes, entre otros aspectos.

En SM asumimos este reto junto con los colegios, profesores, alumnos y padres de familia. Ponemos a su servicio nuestro saber hacer, acompañándolo y brindándole una amplia oferta orientada al desarrollo de competencias, la cual incorpora la tecnología como estrategia de fomento de las habilidades digitales. **Conect@** es la respuesta para hacer frente a los retos de la sociedad del conocimiento y a la Nueva Articulación de la Educación Básica.

En el contexto de la reciente Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), esta guía didáctica tiene el propósito de brindarle recomendaciones prácticas para el tratamiento de los contenidos curriculares de los planes de estudio vigentes, mismos que conforman la Nueva Articulación de la Educación Básica; tiene el propósito fundamental de favorecer la adecuada interpretación y educativo aprovechamiento del libro del alumno y de las secuencias didácticas que se plantean en este.

En esta guía se presentan las respuestas de todas las actividades del libro del alumno, así como sugerencias didácticas que apoyarán su labor docente. Se incluye también la definición relativa a la enseñanza, con base en el modelo de competencias. Además, se explican las sugerencias de evaluación que incluye el libro del alumno, las cuales se han diseñado para evaluar competencias. La dosificación y los conceptos fundamentales del enfoque de la asignatura de **Matemáticas** puede consultarlos en la reproducción del libro del alumno que se incluye en esta guía.

Estas son las características de la guía didáctica.

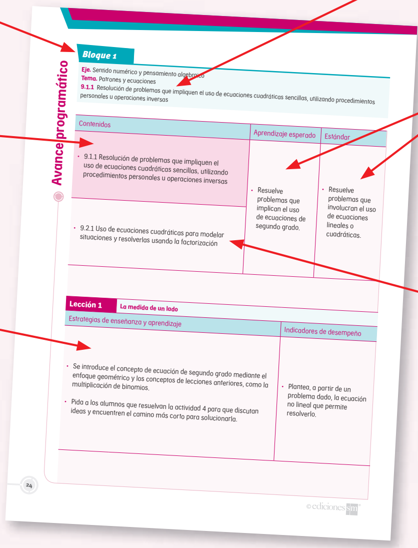
- Facilita la organización de la enseñanza y el seguimiento del aprendizaje.
- Explica los elementos del enfoque de enseñanza de Matemáticas en la Educación Secundaria.
- Propone una dosificación del curso con base en la carga horaria de la asignatura.
- Contiene sugerencias didácticas que consideran los aprendizajes esperados y los estándares curriculares.
- Incluye las respuestas de las actividades del alumno y de las evaluaciones.

¡Gracias por permitirnos ser su compañero en la aventura de educar la infancia de la Sociedad del Conocimiento!

¿Cómo usar esta guía?

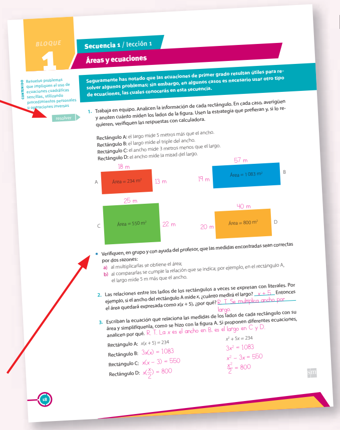
El avance programático contiene lo siguiente.

- Bloque, eje y tema al que pertenece el contenido desarrollado en la lección
- Conocimiento y habilidad que se trabajan en la lección
- Secuencia de contenidos del mismo grado y de otros que permiten obtener el aprendizaje esperado
- Aprendizaje esperado y estándar curricular relacionados con el contenido
- Sugerencias didácticas e indicadores de logro
- Nombre y número de lección



El libro del alumno con las respuestas

- En las actividades los alumnos desarrollan las cuatro competencias matemáticas. Se indica la que se favorece más en alguna de ellas.
- En las puestas en común se destacan dos competencias (comunicar y validar), de manera sistemática, mediante el logo *.
- Respuesta de las actividades, resaltadas en color magenta. En algunas respuestas se emplea la abreviatura R. P. cuando el alumno debe colocar una respuesta personal; aparece R. T. cuando es una respuesta tipo, debido a que el ejercicio se puede responder de varias formas.



Índice

La educación es un camino apasionante en el que la calidad del viaje importa más que el destino; en el que el proceso de aprendizaje cuenta más que los resultados. La clave no está en la acumulación de datos y saberes enciclopédicos, sino en el desarrollo de habilidades y capacidades para afrontar los retos de un futuro incierto.

Hoy enfrentamos un nuevo escenario, un nuevo paradigma impulsado por la irrupción de los medios digitales, en el que han cambiado tanto las necesidades de la educación como los aprendizajes básicos. El rápido desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) promueve nuevas formas de enseñanza y aprendizaje complementarias al libro en papel, que resultan de gran interés para potenciar las competencias de los alumnos del siglo XXI.

El mundo educativo se está transformando. En el siglo XX, la educación estaba centrada en las instituciones y su principal objetivo era la certificación formal. En el siglo XXI, en cambio, el modelo educativo se centra en el alumno autónomo y el objetivo es que siga aprendiendo a lo largo de su vida.

Anteriormente, en el currículo, se enfatizaba en los datos y en la formación disciplinaria; en la actualidad, uno de los mayores desafíos educativos consiste en desarrollar competencias para la vida, con el propósito de que los alumnos puedan desenvolverse de manera autónoma. Esto implica enseñarles a integrar y relacionar los distintos aprendizajes, y a saber utilizarlos de manera práctica en contextos reales.

La incorporación efectiva de estas competencias en el currículo no es sencilla, exige esfuerzo de la comunidad educativa y, sobre todo, del profesorado, quien debe reenfocar su labor para poner énfasis en el desarrollo de competencias.

Es por ello que en México, al igual que en muchos otros países, se ha definido un perfil de egreso de la educación básica y se ha decidido organizarla en un solo tramo educativo. Dicho perfil es preponderante en el proceso de articulación de los tres niveles de la educación básica; es el resultado de desarrollar competencias para la vida que darán a los jóvenes la garantía de desenvolverse satisfactoriamente en cualquier ámbito en que elijan continuar su aprendizaje. Para alcanzarlo, los alumnos deben desarrollar este perfil desde su ingreso a la escuela.

En SM asumimos este reto junto con las escuelas, profesores, alumnos y padres de familia. Ponemos a su servicio nuestro saber hacer, acompañándolo y brindándole una amplia y diversa oferta modular orientada al desarrollo de competencias, la cual incorpora la tecnología como estrategia de fomento de las habilidades digitales. Conect@ es la respuesta para hacer frente a los retos de la Sociedad del Conocimiento y a la Nueva Articulación de la Educación Básica.

Si bien Conect@ se apega totalmente a las disposiciones oficiales, no se circunscribe a ellas. La mirada educativa de SM sobre la sociedad que queremos construir enriquece la propuesta y la hace pertinente a las necesidades de las escuelas de hoy.

Conect@ es un proyecto multiplataforma integrado por un conjunto de productos y servicios que abarca todos los grados de la educación básica. La oferta de Conect@ está constituida por 68 libros impresos y digitales: 50 curriculares y 18 complementarios.

Estos 68 libros abarcan los tres niveles educativos: 18 para preescolar, 36 para primaria y catorce para secundaria; y están organizados en cuatro campos de formación.

1. Lenguaje y comunicación (Conect@ Palabras)
2. Pensamiento matemático (Conect@ Estrategias)
3. Exploración y comprensión del mundo natural y social (Conect@ Entornos)
4. Desarrollo personal y para la convivencia (Conect@ Personas)

Además, la propuesta se complementa con el portal Conect@ Digital, el cual ofrece un espacio de interacción con recursos específicos para alumnos y profesores. Incluye un "Entorno Virtual de Aprendizaje" con más de 1 500 actividades en soporte digital, así como recursos didácticos y acceso a comunidades virtuales para compartir experiencias.

Conect@ es mucho más que una colección de libros; por ello, ofrece múltiples actividades de formación, además de sesiones de asesoría y evaluación. Al adquirir los libros de Conect@, usted recibirá una conferencia magistral sobre el programa de la Nueva Articulación de la Educación Básica y podrá elegir dos talleres sobre cada campo de formación que haya adquirido.

Las asesorías consisten en sesiones de trabajo con nuestro calificado equipo de especialistas educativos para analizar los componentes de Conect@. Respecto a la evaluación, se aplicará un diagnóstico de áreas de oportunidad a los profesores usuarios.

Las claves pedagógicas son los principios que guían la aplicación del enfoque de enseñanza por competencias, y han sido desarrolladas con un doble propósito.

1. Ser la estructura sobre la cual se desarrollen los contenidos con el fin de alcanzar los aprendizajes esperados, contribuir efectivamente al logro de estos y de las competencias para la vida
2. Ser criterios orientadores para el trabajo en el aula con los contenidos del libro para simplificar la tarea docente de crear un ambiente de aprendizaje que promueva competencias genéricas y específicas
3. En este sentido, la estructura de los libros de Conect@ favorece el cambio de los estilos de enseñanza y apoya la transformación de la práctica docente que exige la Nueva Articulación de la Educación Básica propuesta por las autoridades educativas del país

Clave 1. Los estudiantes y sus procesos de aprendizaje: estructura de Conect@

El centro y el referente fundamental del proyecto Conect@ es el estudiante. En esta colección se asume como punto de partida que, desde etapas tempranas, es posible generar en el estudiante las siguientes disposiciones y capacidades: continuar aprendiendo a lo largo de la vida; desarrollar habilidades superiores del pensamiento para solucionar problemas; pensar críticamente; comprender y explicar situaciones desde diversas áreas del saber; manejar información; e innovar y crear en distintos ámbitos de la vida.

La investigación educativa ha documentado durante los últimos 25 años que los alumnos tienen conocimientos y creencias respecto a lo que se espera que aprendan, acerca del mundo que les rodea, de las relaciones y de las expectativas sobre su comportamiento. En este sentido, es necesario reconocer la diversidad social, cultural, de capacidades, estilos y ritmos de aprendizaje de los estudiantes, y aprovecharla para generar ambientes que los acerquen al aprendizaje significativo. Por ello, la colección Conect@ está diseñada con base en una variedad de colores atractivos, en portadas que corresponden al mundo iconográfico de los niños y jóvenes, y en ilustraciones claras —cuya incorporación tiene propósitos didácticos y no meramente decorativos—. Además, en Conect@ se utiliza un lenguaje directo que cuestiona a los estudiantes, y se proponen actividades lúdicas, retadoras, orientadas a desarrollar las habilidades correspondientes a los distintos tipos de pensamiento y al logro de los aprendizajes esperados.

Clave 2. Organizar el proceso de aprendizaje en función del estudiante y del contenido

La visión del aprendizaje como un proceso requiere de diversos momentos de interacción del alumno con los contenidos de estudio, también exige una manera específica de organizar la enseñanza e implica gestionar la clase considerando la dificultad del contenido, las experiencias y conocimientos de los estudiantes, y la meta que se quiere alcanzar. Para ello, es necesario organizar actividades de aprendizaje a partir de las diversas formas de interacción de alumnos y contenido (cualitativo, cuantitativo, integrativo, personal, colaborativo, concreto o abstracto). Las actividades deben representar desafíos intelectuales para los estudiantes, con el fin de que planteen alternativas de solución. Para diseñar una planificación se requiere superar las clases magistrales, unidireccionales y discursivas, y proponer secuencias y proyectos didácticos.

Conect@ está organizado en secuencias didácticas que permiten a los alumnos aproximarse, con base en sus conocimientos previos, a los nuevos contenidos de estudio. Este planteamiento reconoce que los estudiantes aprenden a lo largo de la vida y que se involucran en su proceso de aprendizaje.

Las actividades incluidas en las secuencias de Conect@ se han diseñado cuidando que las diferentes situaciones de aprendizaje sean interesantes y constituyan un desafío, con el fin de que los estudiantes indaguen, cuestionen, analicen, comprendan y reflexionen. La organización didáctica de las secuencias permite que el profesor identifique los niveles de complejidad de cada actividad, así como la función que debe asumir para favorecer el aprendizaje: ¿cuándo debe cuestionar? ¿Cuándo debe promover el trabajo colaborativo? ¿Cuándo es conveniente que favorezca la obtención de conclusiones?, etcétera.

Adicionalmente, Conect@ incorpora en varias de sus secciones (entrada y final de bloque y evaluaciones) temas de relevancia social para que los alumnos relacionen lo que aprenden en la escuela con lo que aprenden en casa y en otros ámbitos. Por ello, en cada una de las asignaturas, niveles y grados se tratan importantes temas que contribuyen a la formación crítica, responsable y participativa de los estudiantes en la sociedad. Estos favorecen aprendizajes relacionados con valores y actitudes, sin dejar de lado la adquisición de conocimientos y habilidades.

Clave 3. Favorecer la aplicación de un modelo de enseñanza basado en competencias

Hacer realidad el aprendizaje basado en el modelo por competencias requiere transformar las prácticas de enseñanza en formas diferentes de interacción de los estudiantes y los contenidos, y contar con diversos recursos didácticos para aprovechar una temática de interés para los estudiantes. Asimismo, implica tener a la mano información que favorezca nuevas formas de aprender los contenidos del programa; establecer vínculos con contenidos estudiados en otras asignaturas; y favorecer la interacción armónica y respetuosa.

Pero poner en práctica estas acciones en clase es problemático y requiere que usted tenga muy claro el aprendizaje que espera del estudiante; que sepa reconocer los elementos del contexto (la historia de la localidad, las prácticas y costumbres, las tradiciones, el carácter urbano de dicho sitio, el clima, la flora y la fauna) para integrarlos a la situación específica de aprendizaje; y gestionar la interacción con los estudiantes, entre otros aspectos.

Conect@ proporciona, mediante una rica variedad de cápsulas, este tipo de herramientas para que usted las utilice de manera flexible, de acuerdo con las necesidades e intereses de sus alumnos.

Cápsulas	Propósito	Icono
En contexto	• Establecer una relación entre los contenidos y algún aspecto de otra asignatura o la vida cotidiana	En contexto
Conect@mos	• Sugerir páginas electrónicas y actividades con TIC	conect@mos
Ya sabemos…	• Apoyar a los alumnos para recordar definiciones, técnicas, descripciones y características de lo aprendido	Ya sabemos…
Reflexionamos	• Plantear preguntas para consolidar la comprensión de los contenidos	Reflexionamos
Convivimos	• Sugerir actitudes positivas o actividades para aplicar en la comunidad	Convivimos
Una pista	• Sugerir una pista para la resolución de algún problema o actividad con cierto grado de dificultad	Una pista

Clave 4. Fomentar el aprendizaje colaborativo

La única manera de hacer posible la existencia de aulas inclusivas, en las cuales alumnos muy diferentes puedan aprender juntos, es estructurar en ellas el aprendizaje de forma colaborativa. Difícilmente se pueden practicar y, por lo tanto, aprender, algunas competencias básicas, por no decir todas, si los alumnos no tienen la oportunidad de trabajar juntos en clase, reunidos en equipo, de manera constante.

Conect@ propone a las escuelas y a los profesores concretar este tipo de aprendizaje mediante tres formas básicas de interacción de alumnos, y de alumno y profesor.

1. Momentos para la enseñanza personalizada, es decir, que se ajuste a las características de cada estudiante.
2. Momentos de aprendizaje mediante el fomento de la autonomía de los estudiantes, o sea, que sepan aprender de forma independiente.
3. Momentos de aprendizaje cooperativo, es decir, que los estudiantes se ayuden mutuamente.

Conect@ incluye diversas actividades de trabajo: proyectos estudiantiles o didácticos, estudios de caso, investigaciones cortas, pero productivas, etc. Este tipo de estrategias didácticas le ofrece a usted la oportunidad de identificar, de manera global, el avance de los alumnos en las competencias para la vida. Además, les permite a estos últimos superar la visión de aprendizajes fragmentados y acercarse al espíritu del aprendizaje competencial.

Clave 5. Favorece la búsqueda, selección y discriminación de información proveniente de soportes distintos (impresos, digitales, orales, etcétera)

Los cambios radicales provocados por la tercera revolución industrial —la de las tecnologías de la información y la comunicación— han creado una nueva dinámica social, en la que la noción de conocimiento, cualquiera que sea su tipo, se ha vuelto esencial en los procesos de desarrollo e innovación. En nuestros días, se asume que el conocimiento se ha convertido en objeto de desafíos económicos, políticos y culturales hasta tal punto, que las sociedades cuyos contornos empezamos a vislumbrar pueden calificarse de sociedades del conocimiento.

Si bien, la escuela tiene como función promover la formación básica, eso no significa que deba limitarse a impulsar la adquisición de información relativa a las áreas socialmente validadas, sino que tendrá que transformarse en una escuela en la que se comparta el conocimiento, con el fin de propiciar el desarrollo del ser humano y la vida. Lo anterior exige incorporar en las clases portadores de información variados y con propósitos distintos a los usados comúnmente.

Como los formatos y medios de acceso a dichos portadores requieren habilidades específicas para su uso, se vuelve necesario incorporarlos, si bien con criterio pedagógico, con urgencia. Será necesario ir más allá del libro de texto e incorporar los acervos de la biblioteca familiar y escolar, recursos multimedia, Internet, periódicos, etcétera.

El proyecto Conect@ pone a disposición de usted, profesor, alumnos y padres de familia, adicionalmente a los libros impresos, un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje que enfatiza el desarrollo y la aplicación de las habilidades digitales y de las competencias de la sociedad del conocimiento: Conect@ Digital.

Conecta@ Digital está diseñado para apoyar a los profesores de educación básica en la tarea de impulsar los siguientes aspectos de la formación de los estudiantes.

1. Creatividad e innovación
2. Comunicación y colaboración
3. Investigación y manejo de información
4. Pensamiento crítico, solución de problemas y toma de decisiones
5. Ciudadanía digital

Conect@ Digital contiene lo siguiente.

A) Para los profesores

- Libros de texto y guías didácticas en soporte digital
- Acceso al contenido digital del libro del alumno
- Extenso acervo de actividades de refuerzo y ampliación para usarlo de manera flexible, en función de las necesidades de aprendizaje de los alumnos
- Herramientas que potencian las presentaciones del libro, para usarlas en pizarrones tradicionales o interactivos
- Capa (*layer*) del profesor, la cual le permite añadir contenidos al libro de texto y, por lo tanto, personalizarlo.
- Entorno virtual de aprendizaje que facilita la participación y el seguimiento de los alumnos.
- Blogs sobre temas de vanguardia mediante los cuales usted podrá participar en una comunidad virtual de aprendizaje formada por diversas escuelas del país.
- Acceso a una comunidad virtual de profesores, en el portal Aprender a Pensar, para compartir consideraciones sobre el reto de enseñar a niños y jóvenes del siglo XX.
- Contacto con el editor y los autores del libro para que atiendan necesidades específicas de orientación didáctica.
- Folletos digitales que lo ayudarán a interactuar con los padres de familia.

B) Para los alumnos

- Libros de texto en soporte digital, para cada grado, enriquecidos con numerosos y variados recursos interactivos
- Acervo de actividades de refuerzo y ampliación para fortalecer el logro de los aprendizajes esperados
- Registro del cumplimiento de actividades en el entorno virtual de aprendizaje
- Foro para el trabajo personalizado, en el que podrán compartir información con sus compañeros y profesores.
- Audiolibros sobre temas educativos para propiciar el acercamiento entre padres e hijos

C) Para los padres de familia

- Folletos digitales orientativos que tratan temas de interés sobre la educación
- Audiolibros sobre temas educativos para propiciar el acercamiento entre padres e hijos

Clave 6. La evaluación del aprendizaje como estrategia para retroalimentar el proceso de enseñanza

En la actualidad, la evaluación del aprendizaje ha permitido consolidar un cambio de paradigma: hace dos décadas este tema aludía únicamente al examen mediante el cual el alumno obtenía una calificación; hoy se reconoce la importancia de la evaluación como un proceso formativo que se convierte en elemento para la retroalimentación del aprendizaje de alumnos y padres de familia, así como para identificar necesidades específicas de la tarea docente.

A diferencia de otros tipos de evaluación, donde se enfatiza la calificación de comportamientos modificados por los alumnos, la perspectiva de Conect@ pone el énfasis en atender los diversos momentos que experimenta el alumno durante el proceso de desarrollo de un aprendizaje. El enfoque de evaluación de Conect@ se centra en la evaluación del aprendizaje pero no se limita a esta, pues también incluye su perspectiva de manera que retroalimente la actividad docente.

Conect@ ofrece a los profesores esquemas de evaluación que les permiten llevar a cabo una amplia gama de tareas, por ejemplo: el desarrollo de proyectos, la estructuración de portafolios, el trabajo por rúbricas o matrices de desempeño, guías de observación, resolución de problemas en forma individual o grupal, periódico mural e incluso, en algunas ocasiones, exámenes. Estos instrumentos y técnicas posibilitan la interacción de diversos elementos y actores educativos: contenidos cognitivos de un campo con algún referente concreto de la realidad que permita dar sentido a la tarea de evaluar; alumnos, padres de familia, docentes y directivos escolares.

La evaluación formativa que propone Conect@ está diseñada para obtener evidencias, elaborar juicios informados y brindar retroalimentación sobre los aprendizajes logrados por los alumnos durante su formación. Además, dicha evaluación constituye el eje para identificar y considerar el logro de los aprendizajes tanto de manera individual como grupal.

Los materiales de los alumnos permiten aplicar e integrar los contenidos estudiados, para valorar si han alcanzado los aprendizajes esperados y en qué medida lo han hecho. Lo anterior se concreta mediante secciones fijas de evaluación incorporadas en el libro. En la colección Conect@ se incluyen, a lo largo de la educación básica, rúbricas de verificación, listas de cotejo y control, anecdotario, observaciones directas, textos escritos y dibujos, proyectos colectivos de búsqueda de información, identificación de problemáticas y propuestas de alternativas de solución, redes mentales, esquemas y mapas conceptuales, registros y cuadros para anotar las actitudes observadas en los estudiantes, portafolios de evidencias, reactivos competenciales y reactivos tipo PISA y de opción múltiple.

Secciones fijas de evaluación	Descripción
Evaluación	• Reactivos tipo PISA para evaluar competencias • Evaluación con reactivos de opción múltiple

De igual modo, en Conecta@ Digital encontrará recursos de evaluación que pueden ser utilizados de manera flexible.

Clave 7. El proyecto educativo de SM como marco de Conect@

En SM entendemos que hablar de educación es hablar más de semillas que de frutos, más de siembra que de cosecha; es trazar un rumbo y ponerse en camino. En SM, en conjunto con los profesores, acompañamos a los alumnos en su crecimiento, en todas sus facetas como persona; los conducimos y los nutrimos. Educar implica conducir desde fuera para dejar nacer todo lo que la persona lleva dentro. Educar significa intervenir positivamente, desde la autoridad moral de usted, para hacer crecer.

Es así que la escuela de nuestros días se enfrenta a desafíos sin precedentes: se espera que prepare a los futuros ciudadanos que actuarán en ambientes socioculturales y laborales caracterizados por constantes cambios. La parte crítica de dichos desafíos consiste en que los alumnos aprendan de una manera diferente, es decir, que se les oriente al descubrimiento; al manejo de fuentes de información múltiples y en formatos distintos; que tengan la capacidad para trabajar en equipo y que aprendan de la diversidad con la que conviven cotidianamente. Asimismo, se requiere que los estudiantes actúen con referentes éticos y desarrollen identidades sólidas y definidas. En pocas palabras: que se formen en un ambiente orientado al desarrollo de las competencias para el aprendizaje permanente, el manejo de la información y de situaciones, la convivencia y la vida en sociedad.

Sin embargo, desarrollar competencias desde la escuela no es una tarea fácil ni inmediata. Se requiere una transformación de las formas de dar clases de los profesores, así como sustituir la función del profesor por el de educador que aprovecha un campo de conocimientos (asignaturas) para fomentar el desarrollo integral de los estudiantes. Se requiere renovar la relación entre la escuela, los alumnos y los padres de familia, de modo que se socialicen las metas de enseñanza, los logros de aprendizaje, las estrategias para atender las diversas necesidades de esta, etcétera.

Ese espíritu es el que anima a Conect@. Mediante el portal permite poner en contacto a padres de familia con profesores; a utilizar los recursos digitales en función de las características y necesidades de los estudiantes; y vincula a la escuela con un espacio dedicado a los temas educativos, a los cuales coloca en el centro de la discusión, de los debates y de las alternativas que se están aplicando en múltiples escuelas de México que utilizan estos materiales.

En SM estamos conscientes de que el desafío se puede afrontar trabajando juntos, como debe ocurrir en todo proyecto educativo. ¡Gracias por permitirnos ser su compañero de viaje!

Vivimos en un mundo caracterizado por los avances tecnológicos que permean cada aspecto de la vida cotidiana. Es un mundo marcado por la competencia y los cambios, en el cual la educación es fundamental para tener acceso a mejores oportunidades en la vida.

El uso de las **tecnologías de la información y comunicación (TIC)** permite que los estudiantes desarrollen tanto competencias educativas como competencias para la vida. El Plan Nacional de Desarrollo establece que "el analfabetismo digital es un barrera decisiva para el acceso de los mexicanos en un mundo globalizado. No basta con saber leer y escribir; para competir exitosamente hace falta también saber utilizar las computadoras".[1]

Con la tecnología podemos divertirnos y comunicarnos, aprender y enseñar. Los estudiantes deben adquirir las herramientas básicas que les permitan aprender con ella y, de esta forma, estar preparados para interactuar adecuadamente con los recursos tecnológicos disponibles en la actualidad y los que se desarrollarán en el futuro.

El uso didáctico de las tecnologías de la información y la comunicación fomenta los siguientes elementos.

Uso de las TIC en la educación básica		
Desarrollar competencias para aprender a lo largo de la vida	Impulsar la comunicación en los ambientes colaborativos	Fomentar la autonomía del estudiante

El plan de estudios 2011 para la educación básica contempla el desarrollo de habilidades digitales como eje transversal de los campos formativos del currículo, con el objetivo de que los estudiantes aprovechen los recursos tecnológicos a su alcance como medios para comunicarse, obtener información y construir conocimiento.

Para ello, la reforma educativa definió **Estándares de Habilidades Digitales,** fundamentales en el desarrollo de competencias para la vida y la construcción de una ciudadanía digital.

[1] Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, Estrategia 11.1, p. 188.



Para desarrollar estos estándares en la educación básica, el gobierno federal creó la estrategia educativa de **Habilidades Digitales para Todos (HDT)**, programa enfocado en brindar las herramientas necesarias para que los estudiantes puedan insertarse en la sociedad del conocimiento a través del desarrollo de sus habilidades digitales.

1. Conocer las TIC y utilizarlas de manera creativa, experimentando formas innovadoras de emplearlas
2. Comunicarse y compartir información con otros, así como trabajar en ambientes colaborativos
3. Buscar, analizar y evaluar la información requerida utilizando diferentes fuentes

4. Reflexionar y encontrar la solución a diversos problemas, aprendiendo a tomar decisiones y hacerse responsable de sus consecuencias
5. Utilizar las TIC de forma responsable y respetuosa, convirtiéndose en un ciudadano digital que contribuya con el desarrollo de su comunidad
6. Emplear las TIC de manera eficaz para transmitir contenidos

El plan de estudios 2011 señala que las habilidades digitales se encuentran presentes en todos los campos formativos, por lo que no debe ser objeto de una sola materia aislada, sino que debe apoyar decididamente las experiencias de aprendizaje de todas las asignaturas.

La apropiación de estas habilidades digitales en los procesos de enseñanza requiere de la formación continua de los profesores con el objeto de que puedan desarrollar las competencias digitales para sus prácticas docentes. Por un lado, es necesario integrar a la escuela las experiencias con tecnología que los estudiantes tienen en su vida cotidiana; por otro, es indispensable que la escuela permita que los estudiantes tengan acceso a la tecnología para reducir la brecha digital.

A continuación se mencionan algunas sugerencias para la incorporación de las TIC en los procesos de aprendizaje.

Habilidades digitales	Recursos	Sugerencias
Herramientas de colaboración y comunicación	Correo electrónico, blogs, foros, chats	Estos recursos permiten la comunicación instantánea con personas de cualquier parte del mundo. Proveen un espacio en el que se intercambian puntos de vista, experiencias y resultados con otros estudiantes.
	Teléfonos celulares, *tablets*	Pueden ser usados para distribuir diversos contenidos educativos.
	Podcasts	Son archivos de sonido en formato mp3 que le permitirán transmitir mensajes o contenidos educativos de fácil acceso para sus estudiantes.

Herramientas de productividad	Procesadores de texto, hojas de cálculo, presentaciones	Estas herramientas sirven para crear documentos, bases de datos, identificación de tendencias, presentaciones, entre otras muchas funciones que potencian el trabajo escolar.
Investigación y manejo de la información	Internet	Internet ha cambiado la forma de tener acceso a la información. Es muy importante que trabaje con sus alumnos sobre la identificación de fuentes confiables mediante consultas de páginas oficiales; fomente este uso por medio de ligas seguras a portales educativos. Trabaje con ellos el desarrollo del pensamiento crítico para discernir sobre las fuentes de información y que tomen propias decisiones sobre lo publicado en línea.
Materiales didácticos digitales	HDT, portales educativos	Impulse el uso de los materiales educativos gratuitos que ofrecen una gran variedad de portales, los cuales pueden ayudarle a trabajar una gran cantidad de contenidos de diversas asignaturas.
Ciudadanía digital	Internet, redes sociales	Fomente la incorporación a las redes sociales con base en principios éticos, para así alcanzar un uso seguro y responsable de la Internet.

La construcción de la ciudadanía digital contempla el uso ético de los recursos informáticos. La Internet ofrece una gran cantidad de información, pero también de peligros; así pues, los alumnos deben reconocerlos para que puedan protegerse de ellos.

A continuación, se numeran algunas recomendaciones que ayudarán a los estudiantes a tener una experiencia digital segura.

Para navegar seguro

1. Es necesario que protejan la información personal. Comente que los datos personales los identifican como personas, por ello no deben proporcionar esta información a nadie.
2. Si entran a sitios con imágenes o palabras ofensivas, pídales que salgan de ellos y lo comenten con sus padres o tutores.
3. No deben abrir correos electrónicos de desconocidos.

Para usar redes sociales y foros

1. Sugiera que entren a foros que traten temas de acuerdo con la edad e intereses de los alumnos.
2. Coménteles que no todo es verdad en Internet. Deben tener cuidado, pues muchos usuarios mienten sobre su verdadera identidad.
3. Si alguien a quien contactaron en línea desea conocerlos personalmente, deben hacerlo del conocimiento de sus padres o sus tutores.
4. Cuando usen redes sociales, deben crear perfiles privados y agregar a sus contactos conocidos. No deben proporcionar sus datos personales.

Uso del celular

1. Pida que no proporcionen el número telefónico a extraños.
2. Solicite que no usen el celular para molestar o insultar a otras personas.

Videojuegos

1. Sugiera que jueguen solo los que son adecuados para su edad. Además, deben determinar tiempos para las sesiones de juego.

Para más información, consulte junto con sus estudiantes la página http://www.clicseguro.sep.gob.mx/index.php

Los aprendizajes esperados y los estándares curriculares

La Nueva Articulación de la Educación Básica está orientada, de manera prioritaria, al desarrollo de las competencias para la vida, a la par del desarrollo de las habilidades, conocimientos y actitudes propias del pensamiento matemático. El programa de articulación tiene el objetivo de unificar los enfoques de enseñanza y secuenciar la profundidad de los aprendizajes durante los cuatro periodos escolares (preescolar, primero a tercer grado de primaria, cuarto a sexto grado de primaria, y secundaria). Los elementos que articulan estos cuatro periodos son el perfil de egreso, los nuevos estándares curriculares y el enfoque de enseñanza de las matemáticas en la educación básica.

Este programa de articulación ha generado los estándares curriculares y los vinculó con los aprendizajes esperados. Estos componentes son enunciados o indicadores que definen aquello que los estudiantes deben saber y saber hacer, así como las actitudes que demostrarán durante el proceso de aprendizaje y de exposición de lo aprendido. Los aprendizajes esperados y los estándares son útiles para dar seguimiento al desarrollo de las competencias. Los aprendizajes esperados se consiguen después del estudio de una secuencia de contenidos del programa, que están vinculados entre sí, y se demuestran a través de desempeños concretos de los alumnos en situaciones problemáticas. Por otra parte, los estándares curriculares enmarcan una secuencia de aprendizajes esperados y se definen al término de cada periodo escolar.

Debido a su importancia, presentamos los aprendizajes esperados y los estándares curriculares en el avance programático de la guía didáctica, y que están relacionados con los contenidos de estudio del programa. De esta forma, usted podrá efectuar un seguimiento puntual sobre el avance que se espera tengan los estudiantes.

Actitudes y valores

Uno de los propósitos del programa de matemáticas es que los alumnos muestren disposición positiva hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo. Los estándares curriculares cubren cada uno de los ejes de contenido (Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; Manejo de la información) y abarcan un cuarto rubro que es de reciente incorporación: las actitudes y valores hacia el estudio de las matemáticas. En la serie Conect@ Estrategias hemos incluido una serie de recomendaciones en las cápsulas "Convivimos", mismas que facilitarán algunas pistas sobre cómo trabajar estos estándares.

El enfoque didáctico y las competencias matemáticas

El enfoque didáctico para el campo formativo Pensamiento Matemático se fundamenta en la resolución de problemas, pues se busca despertar el interés de los estudiantes mediante secuencias que impliquen situaciones problemáticas con las que reflexionen para desarrollar sus propias estrategias y formulen argumentos que validen sus resultados.

Las competencias que se indican en el programa son resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

Matriz de competencias

Cada una de las competencias matemáticas se divide en varias subcompetencias. Presentamos un cuadro en el que hacemos una propuesta sobre las subcompetencias que se trabajan principalmente en cada una de las secuencias didácticas de Conect@ Estrategias Matemáticas 3. En cuadro podrá identificar los aspectos de las competencias matemáticas que se consolidarán conforme trabaja con las secuencias didácticas del libro del alumno.

	Resolver problemas de manera autónoma				**Comunicar información matemática**						**Validar procedimientos y resultados**			**Manejar técnicas eficientemente**				
	Resolver problemas	Generalizar procedimientos de solución	Reconocer procedimientos eficaces	Plantear problemas	Representar información matemática	Interpretar información matemática	Establecer nexos entre representaciones	Exponer ideas matemáticas	Deducir información	Inferir propiedades o características de una situación	Explicar procedimientos	Justificar procedimientos	Validar resultados	Uso de formas de representación	Manejo de técnicas o procedimientos	Efectuar cálculo mental	Efectuar estimaciones	Evaluar la pertinencia de los resultados
Bloque 1																		
Secuencia 1	✓				✓				✓				✓					✓
Secuencia 2	✓					✓				✓		✓						✓
Secuencia 3	✓	✓								✓	✓	✓			✓			✓
Secuencia 4	✓					✓		✓	✓			✓		✓				
Secuencia 5	✓				✓	✓		✓				✓	✓		✓			✓
Secuencia 6	✓	✓		✓			✓		✓		✓	✓			✓			
Secuencia 7	✓		✓		✓	✓				✓	✓		✓	✓				✓
Bloque 2																		
Secuencia 1	✓	✓					✓			✓			✓		✓			✓
Secuencia 2	✓	✓								✓	✓				✓		✓	
Secuencia 3	✓				✓			✓			✓		✓					
Secuencia 4	✓		✓			✓	✓			✓	✓		✓					✓
Secuencia 5	✓	✓		✓					✓	✓		✓			✓			✓
Secuencia 6	✓	✓		✓	✓				✓			✓			✓			

	Resolver problemas de manera autónoma				Comunicar información matemática						Validar procedimientos y resultados			Manejar técnicas eficientemente				
	Resolver problemas	Generalizar procedimientos de solución	Reconocer procedimientos eficaces	Plantear problemas	Representar información matemática	Interpretar información matemática	Establecer nexos entre representaciones	Exponer ideas matemáticas	Deducir información	Inferir propiedades o características de una situación	Explicar procedimientos	Justificar procedimientos	Validar resultados	Uso de formas de representación	Manejo de técnicas o procedimientos	Efectuar cálculo mental	Efectuar estimaciones	Evaluar la pertinencia de los resultados
Bloque 3																		
Secuencia 1	✓			✓	✓	✓							✓		✓			✓
Secuencia 2	✓	✓						✓	✓		✓	✓			✓			
Secuencia 3	✓		✓			✓			✓		✓		✓		✓			
Secuencia 4	✓	✓				✓			✓	✓	✓				✓			✓
Secuencia 5	✓				✓		✓					✓		✓			✓	✓
Secuencia 6	✓		✓	✓		✓	✓			✓					✓		✓	✓
Secuencia 7	✓	✓				✓		✓	✓		✓				✓			
Bloque 4																		
Secuencia 1	✓	✓											✓	✓	✓			
Secuencia 2	✓	✓					✓	✓		✓	✓						✓	
Secuencia 3	✓				✓	✓	✓		✓				✓	✓				
Secuencia 4	✓	✓				✓					✓	✓	✓		✓			
Secuencia 5	✓	✓			✓	✓				✓					✓			✓
Secuencia 6	✓	✓				✓	✓		✓	✓			✓	✓	✓			
Secuencia 7	✓					✓		✓	✓		✓			✓				
Bloque 5																		
Secuencia 1	✓		✓		✓								✓					✓
Secuencia 2	✓	✓				✓		✓	✓			✓				✓		✓
Secuencia 3	✓						✓				✓						✓	
Secuencia 4	✓				✓			✓					✓			✓	✓	
Secuencia 5	✓				✓	✓				✓		✓						✓
Secuencia 6	✓					✓			✓	✓			✓		✓			

Bloque 1

Eje. Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema. Patrones y ecuaciones
9.1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas • 9.2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	• Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.	• Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Lección 1 Áreas y ecuaciones

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Se introduce el concepto de ecuación de segundo grado mediante el enfoque geométrico y la multiplicación de binomios. • Pida a los alumnos que, después de resolver la actividad 4, discutan por qué es importante verificar que los valores encontrados satisfacen las ecuaciones correspondientes.	• Plantea, a partir de un problema dado, la ecuación no lineal que permite resolverlo.

Lección 2	**El número desconocido**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Es importante la participación de los alumnos en la resolución de los problemas. Como las actividades se resuelven sobre todo por ensayo y error, los errores conceptuales se notarán al momento en que participen. • Organice una discusión grupal para identificar los métodos y sugerencias más eficaces con el fin de resolver ecuaciones de segundo grado.	• Encuentra soluciones a ecuaciones cuadráticas con el método de ensayo y error.

Lección 3	**El camino de regreso**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• El propósito de la lección es que los alumnos identifiquen que un método para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$ es aplicar operaciones inversas. • Pida que comparen sus respuestas del inciso b) de la actividad 3 e intercambien estrategias para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico y hallar la ecuación que resuelve un problema. • Proponga que usen procedimientos personales y operaciones inversas para resolver las ecuaciones cuadráticas. Si detecta dificultades, solicite que primero usen operaciones inversas para resolver ecuaciones de primer grado y después lo hagan con las de segundo grado.	• Identifica la ecuación que es útil para resolver un problema. • Encuentra soluciones a ecuaciones cuadráticas utilizando operaciones inversas.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades • 9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas • 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales • 9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	• Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	• Resuelve problemas que implican aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.

Lección 4	**¿Son iguales?**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• El propósito de esta lección es que los estudiantes construyan parejas de figuras congruentes y descubran sus propiedades al justificar su congruencia. • En la actividad 1 se asigna mayor número de puntos cuando los polígonos no son del mismo tipo para fomentar que construyan figuras variadas y desarrollen su intuición geométrica. Para la puesta en común de esta actividad no importa que expresen criterios redundantes o con información innecesaria, mientras se percaten de las propiedades de las parejas de figuras congruentes. • Resalte, al final de la actividad 2, que para que un polígono sea congruente a otro es necesario que coincidan las medidas de los lados y de los ángulos correspondientes.	• Comprende las propiedades de las figuras congruentes. • Construye figuras congruentes a una figura dada.

Lección 5	El menor número de preguntas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• El propósito de la lección es que los estudiantes descubran, mediante construcciones, que la congruencia se determina a partir de ciertos criterios sin necesidad de medir todos los ángulos y lados de una figura. • Recuerde que el tema de congruencia y semejanza de figuras se presta para que expliquen y justifiquen sus afirmaciones o resultados, mediante argumentos orientados hacia la demostración formal. • Es importante fomentar el trazo de figuras utilizando solamente la regla sin graduar y el compás, para que descubran más propiedades de las figuras. Por ejemplo, en la actividad 4, podrán notar que basta copiar, con aberturas del compás, las medidas de los lados de un triángulo para trazar otro congruente (mediante circunferencias cuyos radios midan lo mismo que los lados del triángulo).	• Comprende las propiedades de las figuras congruentes. • Construye figuras congruentes a una figura dada utilizando sólo la información necesaria.

Lección 6	La razón de semejanza
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Con la actividad de los barcos se comparan algunos lados y ángulos para saber qué dibujos son semejantes; promueva que midan el resto de los ángulos y lados para ver en qué se parecen y en qué se diferencian los barcos. • Reflexione con ellos si se deben medir todos los lados y ángulos o basta con algunas comparaciones para determinar si hay semejanza. • Es importante comparar y reflexionar las respuestas, sobre todo en la actividad 3, donde los distintos tamaños de los rectángulos ayudan a comprender mejor la razón de semejanza. • Resalte, en la actividad 5, que todas las figuras en el dibujo deben tener la misma proporción respecto a las originales, además de la misma posición.	• Identifica figuras semejantes y su razón de semejanza. • Construye figuras semejantes a partir de una razón de semejanza dada.

Lección 7	**Rompecabezas**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En la lección anterior se construyeron figuras semejantes con un factor de escala, aproveche esto para orientar la reproducción del rompecabezas. Si observa dificultades en la elaboración de las piezas, sugiérales que encuentren el factor de escala y lean, en grupo, las pistas que consideren necesarias. Propicie que compartan sus estrategias para construir las figuras, ya que les proporcionarán diversas maneras de acercarse al problema y plantear sus soluciones.	• Construye figuras semejantes, dada una razón.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada • 9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras • 9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.	• Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos, como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera. • Resuelve problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa y usa las relaciones entre sus puntos y rectas notables.

Lección 8	**Figuras congruentes**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Las actividades de esta lección están enfocadas a sentar las bases de los criterios necesarios y suficientes para decidir si dos triángulos son congruentes entre sí o no. • Pida que comenten, en grupo, las respuestas que obtengan al trazar la figura con la información brindada por usted. Ambas situaciones (no trazar el cuadrilátero o trazarlo correctamente) presentan una oportunidad valiosa con el fin de detectar qué tipo de preguntas sirven para trazar la figura, cuáles no dan información acerca de sus características y cuáles resultan redundantes.	• Construye una figura (triángulo o cuadrilátero) congruente a otra, dadas ciertas condiciones. • Conoce los primeros criterios de congruencia de triángulos.

Lección 9	**Condiciones necesarias y suficientes**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En lecciones anteriores los alumnos estudiaron la congruencia y semejanza de rectángulos, y la congruencia de triángulos; en esta actividad deben identificar qué características son necesarias y suficientes para que exista la congruencia. • Es importante que, tanto en esta lección como en la siguiente, expliquen y justifiquen si entre dos triángulos hay una relación de congruencia; deben apoyarse en el uso de los criterios, utilizar y detectar aquellos que sean suficientes para demostrar formalmente los resultados en sus argumentos.	• Distingue las condiciones necesarias y suficientes para asegurar que dos triángulos son congruentes.

Lección 10	¿Son semejantes?
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se estudian los criterios de semejanza que permiten identificar si dos triángulos son semejantes entre sí. • Un error frecuente es que los alumnos no siempre calculan la medida de los lados dada la proporción entre dos lados de manera correcta; por ello se recomienda hacer notar que entre los lados de dos triángulos ABC y A'B'C', $\frac{AB}{A'B'}$ no es la misma proporción que $\frac{A'B'}{AB}$. • Lleve a cabo un juego similar al propuesto en la actividad 3 de la lección anterior; pida a uno de los estudiantes que indique los criterios de semejanza y las proporciones (puede indicar el factor de escala) para que su pareja construya un triángulo semejante al suyo.	• Identifica si dos triángulos son semejantes o no. • Distingue las condiciones necesarias y suficientes para asegurar que dos triángulos son semejantes.

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
• 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas		
• 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos		
• 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera		
• 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa		
• 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades		

Lección 11	Tablas de valores y gráficas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Comente con los estudiantes la utilidad de usar gráficas y tablas para relacionar dos conjuntos de cantidades. • Si requiere más ejemplos, pida que se reúnan en equipo y discutan cuáles de los siguientes datos tienen asociadas gráficas formadas por segmentos de recta. – El tiempo que tarda un atleta en correr 100 m y la velocidad a la que viaja – El costo de un viaje en taxi y la longitud del trayecto – Lo que se paga al comprar cierta cantidad de gasolina – La longitud del lado de un cuadrado con el perímetro correspondiente – La longitud del lado de un cuadrado con su área	• Analiza la relación entre la regla de correspondencia, la tabla de valores y la gráfica de una relación.

Lección 12	Tarifas telefónicas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Es común enseñar las relaciones con actividades en las que los estudiantes deben tabular la expresión algebraica de una relación y construir su gráfica marcando los puntos de los valores obtenidos. Sin embargo, no en todos los casos se culmina con éxito la actividad ni se efectúan investigaciones que permitan desarrollar nociones acerca del concepto de relación. Esto se debe a diferentes factores. Por ejemplo, un estudiante sin un bagaje aritmético adecuado puede encontrar problemas al tabular una expresión algebraica y como consecuencia la construcción de la gráfica correspondiente le resultará imposible. • Detecte el problema cuando muestren dificultad para encontrar una regla de correspondencia, tabular una relación o graficarla. Si se trata de una deficiencia aritmética (o algún otro obstáculo), hay que resolverla antes de continuar con la asimilación del concepto de *relación*.	• Calcula valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas). • Identifica representaciones que corresponden a una misma situación. • Identifica relaciones de proporcionalidad directa.

Lección 13 Tiempo, distancia, velocidad

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Organice al grupo para que usen una computadora y vean cómo una función se puede tabular y graficar por este medio. Este tipo de recursos contribuyen a la visualización y validación de la solución del problema, además de ayudarlos a mejorar su capacidad de reflexión, conceptualización y comprensión de los problemas algebraicos verbales.	• Calcula valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas). • Identifica representaciones que corresponden a una misma situación. • Identifica relaciones de proporcionalidad directa.

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas • 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera • 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa • 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 14	**Un nuevo tipo de variación**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se introduce un nuevo tipo de relación, la de variación cuadrática. Comente las diferencias que hay entre esta nueva relación y la que ellos vieron en cursos anteriores (lineal de la forma $y = mx + b$). • En el inciso a) del primer problema hallarán valores arbitrarios que cumplan una regla de correspondencia dada; en el inciso b), encontrarán valores que cumplan esta misma regla de correspondencia, pero a partir de ciertos datos dados de antemano. La finalidad es que comprendan que la relación entre el largo y el ancho se puede expresar algebraicamente (inciso c). • En el inciso d) de la actividad, haga notar que si la pecera tuviera un volumen de 3 m^3, el ancho debería medir más de 122 cm pero menos de 123 cm, pues la raíz de $\frac{3}{2}$ está entre 1.22 m y 1.23 m ($y = 2x^2 = 300$). Otra opción es pedir que verifiquen con distintos valores para el ancho, hasta notar que la solución en metros está entre 1.22 m y 1.23, es decir, con 122 cm el volumen es menor que 3 m^3, mientras que con 123 cm el volumen es ligeramente mayor que 3 m^3.	• Identifica y representa algebraicamente relaciones cuadráticas.

Lección 15	**Planes de ahorro I**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta actividad se prepara al alumno de manera intuitiva para que compare las funciones conocidas (lineales) con las cuadráticas. • Si detecta dificultades para resolver los primeros problemas, sugiera que usen tablas y esquemas, para que les faciliten el conteo, y determinen el plan de ahorro más adecuado según la situación que se plantee. Esto puede ser útil posteriormente para la representación gráfica de las relaciones.	• Compara el crecimiento de varias funciones.

Lección 16	Planes de ahorro II
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Se espera que los alumnos identifiquen que la gráfica de los planes de cuota fija corresponde a una línea recta y que la gráfica de los planes de cuota creciente no. Analice las gráficas y pregunte qué significa que estas partan o no del origen, y de qué depende que una recta (ahorro de cuota fija) esté más inclinada que otra. • Fomente la reflexión de las tablas y las fórmulas que se presentan al inicio. Analice con ellos, cuando crea conveniente, qué ocurre entre un plazo y otro, y qué cantidad de dinero se aporta entre estos. Compare los planes de ahorro que se presentan en cada caso.	• Compara planes de ahorro. • Obtiene expresiones algebraicas asociadas a los planes de ahorro.

Lección 17	Planes de ahorro III
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Haga que reflexionen sobre la utilidad de las expresiones algebraicas para facilitar el cálculo del ahorro en cierto plazo, además de la comparación entre planes. Comente la ventaja del uso de tablas cuando implica hacer cálculos de plazos mayores. • En caso de haber dudas, discuta con los alumnos los criterios en los que se basa el crecimiento de las funciones. • Es importante analizar que, en un principio, las funciones lineales (cuota fija) pueden crecer más rápido que las de cuota creciente; pero con estas últimas, a largo plazo, puede obtenerse un mayor ahorro.	• Compara el crecimiento de funciones que dependen de la misma variable. • Obtiene expresiones algebraicas asociadas a los planes de ahorro. • Grafica funciones.

Eje. Manejo de la información
Tema. Nociones de probabilidad
9.1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	• Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	• Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 18	**Laberinto de tubos**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Proponga juegos de azar simples, con dados, monedas y ruletas que fomenten el desarrollo del pensamiento probabilístico de los alumnos, la intuición en fenómenos aleatorios y la necesidad de cuantificar la predicción. No conviene enfocarse a establecer fórmulas y efectuar cálculos complicados; al contrario, debe favorecer la comprensión de las nociones básicas de probabilidad. • Motívelos a que desarrollen sus recursos para representar y simbolizar los resultados de un experimento aleatorio con la finalidad de que comprendan poco a poco los conceptos. • Enfatice que la medida de la probabilidad va de 0 a 1 y puede expresarse con fracciones, decimales o porcentajes. En este último caso, la medida de probabilidad va de 0 a 100 por ciento.	• Identifica distintas maneras de expresar una probabilidad. • Comprende que la escala de la probabilidad está entre 0 y 1.

Lección 19 La ruleta I

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Esta lección es propicia para formalizar, lúdicamente (mediante una ruleta grande en la que todo el grupo pueda jugar), que la probabilidad de que un evento E ocurra se calcula mediante la fórmula $P(E) = \frac{\text{eventos favorables}}{\text{eventos posibles}}$. • Una manera de simular la ruleta es mediante papeles de colores numerados que se correspondan con las pelotas de la ruleta. Entonces un evento sería, por ejemplo, que salga un papel rojo con un número impar. • Plantee otras situaciones sencillas de azar para que den ejemplos de eventos simples o compuestos. Por ejemplo; lanzar un dado, lanzar dos monedas, escoger del mazo una carta sin ver, etcétera.	• Calcula probabilidades sencillas y las expresa con fracción o decimal. • Distingue entre eventos simples y compuestos.

Lección 20 La ruleta II

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección los estudiantes analizarán parejas de eventos y determinarán si son mutuamente excluyentes y, en tal caso, si son complementarios. • Después de que resuelvan las actividades 1 y 2, pregunte qué estrategias siguieron para diseñar los eventos que anotaron. La idea es que analicen que dos eventos pueden ocurrir simultáneamente cuando están compuestos por al menos un evento simple común. • Para reafirmar la diferencia entre eventos excluyentes y complementarios, pregúnteles lo siguiente: “Si dos eventos son mutuamente excluyentes, pero es posible que no ocurra ninguno de los dos, ¿los eventos son complementarios?”.	• Distingue eventos mutuamente excluyentes. • Distingue eventos complementarios.

Lección 21 ¿El resultado depende de los anteriores?

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• El propósito de la lección es que analicen, a partir del espacio muestral, que la ocurrencia de un evento independiente no afecta la ocurrencia de otro. • Revise grupalmente las respuestas de la actividad 2. Es importante que representen correctamente los espacios muestrales, pues con esto obtendrán conclusiones adecuadas en las siguientes actividades. • En la actividad 2, guíelos para que noten que el espacio muestral siempre tiene el doble de elementos que para el número anterior. Por ejemplo, si el foco se enciende cinco veces, el espacio muestral tiene 32 elementos, pues ahora hay dos casos, rojo y verde, para cada uno de los 16 elementos anteriores.	• Distingue cuando la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia de otro. • Calcula la probabilidad de eventos independientes.

Lección 22 Dependientes o independientes

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección identificarán eventos dependientes e independientes y analizarán la manera de calcular la probabilidad de cada uno. • Solicite que analicen juegos de azar conocidos, como la lotería, además de investigar la probabilidad de que un boleto resulte ganador, la de acertar la primera cifra, las dos primeras cifras, etcétera. • Plantee el siguiente problema. Si hay una urna con diez pelotas, cinco blancas y cinco negras, ¿para qué casos se debe usar un sorteo de pelotas con reemplazo y para cuáles sin reemplazo? a) En una cena de fin de año se sortearán cinco regalos entre diez personas. b) En un restaurante se aplicará un descuento a algunos de los comensales; se pretende que aproximadamente la mitad obtenga el beneficio.	• Distingue los eventos dependientes e independientes. • Calcula la probabilidad de eventos dependientes e independientes.

Eje. Manejo de la información
Tema. Análisis y representación de datos
9.1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación • 9.4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión	• Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	• Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Lección 23	**Preguntas adecuadas y no tan adecuadas**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Después de que los estudiantes resuelvan el primer cuestionario, pregunte a cada equipo el porqué de su respuesta. Sugiera que lean, en grupo, el recuadro final y relacionen lo que vieron en la lección con el título de esta. Fomente la reflexión en torno a qué preguntas son adecuadas, cuáles no tanto y por qué.	• Identifica criterios para hacer las preguntas adecuadas con el fin de obtener la información deseada.

Lección 24 La presentación más adecuada

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se analiza cómo obtener datos y cómo presentarlos de una manera conveniente y clara. • Proponga a los alumnos que formen diferentes equipos en cada actividad para que comparen criterios con otros compañeros y no se acostumbren a un único modo de pensar.	• Elabora una encuesta o trabajo de investigación en que las preguntas permiten recolectar información específica.

Lección 25 Comunicación de resultados

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se identifican las preguntas que guían a la información correcta, la manera de interpretar la información obtenida y cómo presentarla de forma clara para el receptor final. • Solicite a los equipos que elijan temas diferentes para que observen cómo distintas preguntas y presentaciones son adecuadas según el tipo de información. • Al final de la recolección de datos, cada equipo debe explicar qué información quería obtener con sus preguntas y analizar si fueron las adecuadas. También debe exponer los resultados ante el grupo y comentar acerca del método que siguieron para llevar a cabo su investigación.	• Expone un trabajo de investigación con la información que desea obtener, las preguntas con que la obtiene y la mejor manera de presentar sus resultados.

Bloque 2

Eje. Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema. Patrones y ecuaciones
9.2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas • 9.2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	• Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.	• Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Lección 26 **La técnica de factorización I**

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se introduce otro método para resolver ecuaciones de segundo grado, pues el de ensayo y error no siempre es el más conveniente. Se recomienda solucionar los problemas de las dos maneras: por el método de ensayo y error, y por el método explicado en la lección para que el alumno compare su efectividad. Pida que sustituya las soluciones en la ecuación para comprobar su validez.	• Factoriza ecuaciones de segundo grado y obtiene las soluciones por tanteo.

Otros recursos
Encuentre una breve explicación de las funciones cuadráticas y sus aplicaciones en la página www.e-sm.com.mx/GSCM3A-26

Lección 27 La técnica de factorización II

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se relacionan conceptos previos: *equivalencia de expresiones, factorización* y *resolución de ecuaciones de segundo grado*. Es importante que el alumno note cómo estos términos se entrelazan. • En la actividad 5 hay que expresar una ecuación de segundo grado en forma general a partir de la ecuación factorizada. Solicite que sustituya los valores obtenidos para verificar si son los correctos.	• Reconoce ecuaciones de segundo grado en su forma general y factorizada, e identifica cuáles son equivalentes. • Encuentra la forma general de una ecuación de segundo grado dada la ecuación factorizada y viceversa.

Otros recursos

Para conocer más acerca de las funciones de segundo grado y su resolución visite la página www.e-sm.com.mx/GSCM3A-27

Lección 28 La técnica de factorización III

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se introducen ecuaciones en formas desconocidas para el alumno, como el caso en que el término elevado al cuadrado tiene un coeficiente diferente de 1, por lo que debe aprender a modificar las ecuaciones para llevarlas a la forma conocida y encontrar sus soluciones; este procedimiento es de gran importancia. • Para propiciar la participación, sugiera al grupo que resuelva las ecuaciones en el pizarrón a modo de concurso; así, la factorización de muchas ecuaciones no resultará tediosa y será posible detectar errores y dudas, sobre todo en las operaciones con signos diferentes.	• Factoriza ecuaciones de segundo grado y encuentra sus soluciones.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada • 9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras • 9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.	• Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos, como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera. • Resuelve problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa y usa las relaciones entre sus puntos y rectas notables.

Lección 29 Trasladar figuras

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Resalte que en una traslación la figura no cambia de tamaño ni de orientación, sólo cambia su posición. • El concepto de traslación es fundamental en geometría, pues se trata de una transformación en el plano que puede ser vista como una función lineal y satisface las propiedades de dichas funciones.	• Comprende el concepto de *traslación*. • Es capaz de trasladar figuras usando escuadras y compás.

Otros recursos
Para profundizar en el estudio de las traslaciones en un plano visite el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3A-29

Lección 30	Rotar figuras
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Mediante la guía de usted, el alumno debe ser capaz de imaginar las figuras que resultan de aplicar ciertas transformaciones, como una rotación, o bien, una combinación de rotación con una traslación. • Consulte en Internet páginas del artista gráfico Escher e imprima dibujos que tengan traslaciones y rotaciones de una misma figura; pida al grupo que encuentre los centros de rotación.	• Comprende los conceptos *rotación, ángulo de rotación y centro de rotación.* • Aprende a rotar una figura.

Lección 31	Transformaciones equivalentes
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección, además de tratar el tema de las reflexiones, se pretende que el estudiante se dé cuenta de que reflejar dos veces una figura equivale, en rectas paralelas, a una traslación, y en rectas que se cortan, a una rotación. • Guíelo para que aprenda que las transformaciones básicas en el plano son las rotaciones y las traslaciones. • Solicite que identifique simetrías en la naturaleza, o bien en las construcciones hechas por el hombre, y ubique sus ejes.	• Aprende a trazar una figura simétrica a otra respecto a un eje. • Aprende los resultados de componer varias transformaciones en el plano.

Otros recursos

Para leer un artículo breve sobre la simetría en la naturaleza visite la página www.e-sm.com.mx/GSCM3A-31

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada • 9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras • 9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.	• Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos, como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera. • Resuelve problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa y usa las relaciones entre sus puntos y rectas notables.

Lección 32 Figuras en movimiento

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Además de pedir al grupo que construya figuras con sus distintos triángulos de cartulina, lleve al salón imágenes en que se apliquen traslaciones, rotaciones y reflexiones de una misma figura para hacer mosaicos; solicite que identifiquen estas transformaciones. Luego, pida que busque en Internet dibujos construidos mediante transformaciones en el plano.	• Identifica los tres tipos de trasformaciones en el plano (traslaciones, rotaciones reflexiones).

Otros recursos
Para encontrar ejercicios interactivos y jugar con las transformaciones en un plano mediante dibujos visite la página www.e-sm.com.mx/GSCM3A-32

Lección 33	**Diseños con transformaciones**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En las actividades 2, 4 y 6 mencione que la precisión del trazo es importante para que las medidas sean exactas. En la actividad 6 destaque la precisión, la creatividad y la cantidad de simetrías en los logotipos diseñados por los alumnos.	• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo • 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	• Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en la resolución de problemas.

Lección 34 Teorema de Pitágoras

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección, los alumnos analizarán varios triángulos rectángulos para descubrir la relación numérica que existe entre las medidas de los lados. • En las actividades 1 y 2, es posible contar, mediante la cuadrícula, la cantidad de cuadritos para determinar el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa. En el caso de las actividades 3 y 4, aunque se podría completar la figura y seguir el mismo procedimiento, se espera que determinen el área del cuadrado de la hipotenusa a partir de las medidas mostradas (longitud de cada cateto). • Al final de la lección se plantea el inverso del teorema de Pitágoras; es decir, si los lados de un triángulo cumplen la relación pitagórica, entonces el triángulo es rectángulo. Ayúdelos a justificar este resultado con preguntas como las siguientes. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 21 cm y 28 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? ¿Por qué? Si los lados de un triángulo miden 21 cm, 28 cm y 35 cm, ¿este triángulo es congruente con el triángulo rectángulo del punto anterior? ¿Por qué?	• Reconoce la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo.

Lección 35 Mostrar o demostrar

Estrategias de enseñanza y aprendizaje

- Se recomienda usar algún *software* de geometría dinámica para los ejemplos propuestos en el libro.

- Si observa dificultades en la actividad 2, dé más ejemplos de cómo comprobar si una terna es pitagórica. Las ternas pitagóricas cumplen $x^2 + y^2 = z^2$ (x e y son las longitudes de los catetos y z, la de la hipotenusa). Las 15 primeras ternas con c ≤ 100 son las siguientes.

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(6, 8, 10)	(7, 24, 25)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)
(13, 84, 85)	(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)
(33, 56, 65)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)

- Mencione que a partir de una terna pitagórica puede obtener otra multiplicando cada termino por un mismo número: por ejemplo, la terna (9, 12, 15) puede obtenerse multiplicando los términos de la terna (3, 4, 5) por 3. Geométricamente, este método equivale a encontrar las medidas de un triángulo semejante; y si el original es un triángulo rectángulo (cumple con el teorema de Pitágoras), el triángulo semejante será también rectángulo (cumplirá con el teorema).

Indicadores de desempeño

- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Eje. Forma espacio y medida
Tema. Medida
9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo • 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	• Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en la resolución de problemas.

Lección 36 Dos lados conocidos y uno desconocido

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se introduce de manera muy básica el concepto de función inversa: la raíz cuadrada es el inverso de elevar al cuadrado, así como la resta es el inverso de la suma; y la división, de la multiplicación. • Es un error común pensar que la raíz de ($a^2 + b^2$) es $a + b$, así que enfatice que esto no es cierto. Para corroborar lo anterior, tome dos números, por ejemplo 3 y 4, y muestre que la raíz de ($3^2 + 4^2$) es la de 25, es decir 5, y no 7 (3 + 4). • Para reforzar el tema, organice al grupo para que juegue una memoria de tres cartas. Para ello, escoja algunas ternas pitagóricas, escriba en cada tarjeta un número de cada terna y colóquelas boca abajo (puede pegarlas con imanes al pizarrón). En su turno, cada alumno volteará tres tarjetas: si los números forman una terna pitagórica, las tarjetas se dejarán boca arriba y el alumno volteará otras tres; si no, perderá su turno y otro alumno repetirá el proceso. El juego terminará cuando todas las tarjetas se hayan descubierto.	• Enuncia el teorema de Pitágoras. • Encuentra la medida faltante del lado de un triángulo rectángulo mediante el uso del teorema de Pitágoras.

Otros recursos
Podrá revisar animaciones con distintas demostraciones del teorema de Pitágoras visite el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3A-36

Lección 37	Problemas diversos
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Revise con el grupo las respuestas de los problemas, para detectar errores en el planteamiento de las ecuaciones o en los métodos de resolución. Sugiera que construyan las figuras con regla y compás para comprobar los resultados. • Para complementar la actividad 4 dicte ternas de números enteros que representen las medidas de los lados de distintos triángulos, para que discutan si el triángulo formado es obtusángulo, acutángulo o rectángulo, y justifiquen su respuesta con base en el teorema de Pitágoras. Cuide que las ternas se correspondan con las medidas de algún triángulo (el número más grande debe ser menor que la suma de los otros dos).	• Resuelve problemas mediante el teorema de Pitágoras, ecuaciones de segundo grado y conceptos de geometría.

Eje. Manejo de la información
Tema. Nociones de probabilidad
9.2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma) • 9.3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto) • 9.5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	• Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 38 — Que caiga tres, que no caiga tres

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Pida al grupo que lleve dados y monedas para hacer conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos, y comprobarlos mediante experimentos. • Comente la utilidad de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas. Cerciórese de que el alumno comprenda por qué la probabilidad de que un evento ocurra más la probabilidad de que no suceda es siempre igual a 1.	• Expresa en lenguaje matemático la probabilidad de que un evento ocurra. • Sabe que la probabilidad de un evento más la probabilidad de su complemento es igual a 1.

Otros recursos

Para apoyar el estudio de la probabilidad en nivel básico visite el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3A-38

Lección 39 — Pelotas rojas o juguetes azules

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Las actividades de esta lección requieren un alto nivel de abstracción matemática; si detecta que alguna actividad les cuesta demasiado trabajo, pídales que comenten sus procedimientos para detectar posibles errores y corregirlos. • Enfatice que cuando dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B se calcula sumando la probabilidad de que suceda A más la probabilidad de que ocurra B, es decir, P(A o B) = P(A) + P(B). Pero si los dos eventos no son mutuamente excluyentes, entonces se resta la probabilidad de que sucedan ambos eventos, pues ha sido contada dos veces, P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B).	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios y mutuamente excluyentes.

Bloque 3

Eje. Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema. Patrones y ecuaciones
9.3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas	• Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.	• Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.
• 9.2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización		
• 9.3.1. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones		

Lección 40 Una fórmula útil

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se presenta la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Resalte que con este método se encuentran las soluciones (aunque no siempre son números reales) de cualquier ecuación de segundo grado escrita en la forma general, y que todas las ecuaciones de segundo grado se pueden llevar a esta forma. • Se recomienda dividirlos en tres equipos para resolver ecuaciones; cada uno hará un paso y, cuando se solucione la ecuación, otro equivo resolverá una ecuación distinta. Por ejemplo, en un caso, el primer equipo pone la ecuación en la forma general; el segundo encuentra el discriminante; y el tercero, las soluciones. Para otra ecuación, el segundo equipo la escribe en la forma general; el tercero encuentra el discriminante; y el primero, las soluciones.	• Resuelve ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

Lección 41 ¿Cuántas soluciones?

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección analizarán el discriminante de ecuaciones de segundo grado y relacionarán su valor con el número de soluciones de la ecuación. • Haga notar que la fórmula general sirve para resolver todas las ecuaciones cuadráticas aunque sean incompletas, es decir, aún si el valor de *b* o *c* es 0. • Al final de la lección analizarán el papel del discriminante en la fórmula general para que se den cuenta que éste determina el valor de la raíz cuadrada (negativa, positiva o 0).	• Utiliza el discriminante de una ecuación cuadrática para determinar el número de soluciones.

Lección 42 Algunos problemas

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Es posible que algún equipo tenga dificultades para traducir un problema a lenguaje algebraico, mientras que otro sí pueda plantear la ecuación inicial, pero no sepa cómo pasarla a la forma general. También suele suceder que un equipo obtenga la ecuación en la forma general, mas no sepa resolverla, mientras que otro encuentre las soluciones, pero no sepa cómo interpretarlas. Si observa este tipo de dificultades, promueva el intercambio de ideas para que los equipos resuelvan de manera conjunta los problemas propuestos.	• Resuelve ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades • 9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas • 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales • 9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	• Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	• Resuelve problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.

Lección 43	**Congruencia y cuadriláteros**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Al término de la actividad 3, recuerde los criterios de congruencia de triángulos, con el fin de evaluar cuáles pueden utilizarse en determinada figura. • Muestre más ejemplos en que se usen los criterios de congruencia y semejanza en otro tipo de figuras, o emplee algún *software* gratuito de geometría dinámica (en internet hay muchos) para diseñar actividades de congruencia y semejanza de triángulos.	• Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o cualquier figura.

Lección 44 ¿Cuánto mide el poste?

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Organice al grupo en equipos y pida que, antes de leer la actividad 1, discutan cómo medirían la altura de un objeto inaccesible (un árbol, el aro de una canasta de basquetbol, una ventana, etc.). Pregunté qué materiales usarían (escuadras, popotes, cintas métricas, gis, cordel, etc.) y cuál sería su estrategia. • Permita que diseñen libremente su estrategia, pues solo así podrán identificar las ventajas y desventajas de su método, y modificar lo que sea necesario.	• Calcula la altura de un objeto de difícil acceso utilizando la semejanza de triángulos.

Lección 45 Calcular distancias

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Al final de la lección, propicie una discusión sobre otros métodos para formar triángulos semejantes y encontrar medidas de objetos inaccesibles. • Sugiera que comparen el método del espejo con el que usaron en la lección anterior. Pida que identifiquen las ventajas de cada método, así como sus limitaciones.	• Calcula distancias a objetos inaccesibles, utilizando razones de semejanza.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	• Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	• Resuelve problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
• 9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas		
• 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales		
• 9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas		

Lección 46 Paralelas y segmentos proporcionales

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Propicie que el grupo discuta y analice por qué algunos triángulos son semejantes y otros no. Puede guiar la discusión con preguntas similares a las de la lección ("¿Qué pasaría si los rayos del Sol tuvieran una inclinación distinta?, ¿qué pasaría si no fueran paralelos?", etc.). Aunque comprender el teorema requiere un alto nivel de abstracción, es posible que el alumno identifique en las figuras ángulos iguales, complementarios o suplementarios, así como rectas paralelas y perpendiculares. El estudiante podrá usar sus conocimientos previos y su intuición para justificar la semejanza de algunas figuras. • Plantee en clase un problema ilustrativo que se resuelva usando el teorema de Tales. Por ejemplo: una persona en tierra ve dos barcos que se acercan entre sí. Al observar con detalle, nota que las rectas que unen a ambos mantienen una orientación constante, es decir, son paralelas. ¿Esto significa que los barcos chocarán?	• Explica en qué consiste el teorema de Tales, con los conceptos vistos en lecciones anteriores.

Lección 47	El teorema de Tales y sus aplicaciones
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se presenta una aplicación del teorema de Tales: dividir un segmento de recta en pedazos iguales. • Si detecta dificultades en la actividad 2, mencione que, aunque no se permite usar regla graduada para medir el segmento, sí pueden copiar siete veces una unidad fija, (por ejemplo, una abertura arbitraria del compás) y usar el método de las rectas paralelas de la actividad anterior. • Pida que dividan un segmento en un número primo relativamente mayor, por ejemplo, 17 o 23 partes, y aclare que, si lo consideran conveniente, pueden usar regla para medirlo. Haga notar que en este caso es mucho más preciso usar una unidad arbitraria y rectas paralelas en lugar de medir el segmento y hacer la división correspondiente.	• Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de línea en partes iguales.

Lección 48	Triángulos, hilo, palillos y algo más I
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Aquí se muestran más aplicaciones del teorema de Tales, como encontrar la proporción entre dos segmentos de recta dadas sus longitudes, o dada la proporción y uno de los segmentos encontrar la longitud del otro. • Procure que el alumno entienda el procedimiento para que haga las construcciones correctamente. Recomiende que trace rectas graduadas en el cuaderno, en lugar de reglas, pues al moverse estas surgen errores en los cálculos. • Dibuje las reglas graduadas en el pizarrón o lleve unas de cartulina y péguelas. Su graduación debe ser a gran escala para que todos la vean.	• Aplica el teorema de Tales para encontrar segmentos proporcionales.

Lección 49 Triángulos, hilo, palillos y algo más II

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Se puede utilizar la regla de tres para resolver la actividad 3, pero es importante que el alumno no se equivoque al plantearla. Es menos probable que esto ocurra si tiene clara la proporcionalidad de triángulos semejantes, por lo que se recomienda un repaso del tema. • Un recurso posible es dibujar triángulos, como los de la actividad 4, en tarjetas grandes, anotar las respuestas en tarjetas pequeñas, repartir a la mitad del grupo las tarjetas con los triángulos y a la otra mitad las respuestas, y pedirles que encuentren las parejas correspondientes.	• Aplica el teorema de Tales para resolver problemas geométricos de proporcionalidad.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	• Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	• Resuelve problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
• 9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas		
• 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales		
• 9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas		

Lección 50	Sombras y otras proyecciones
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Se introduce el concepto *homotecia*, es decir, figuras semejantes con la característica adicional de que los lados correspondientes son paralelos. • La actividad 2 tiene una dificultad elevada, por lo que se recomienda supervisar el trabajo de los equipos y verificar que comprendan los conceptos que se trabajan. • La actividad 1 también se puede llevar a cabo con una linterna. Una posible variante es usar figuras parecidas (por ejemplo, distintos tipos de triángulos) y pedir a un alumno que vea las sombras en la pared, mientras su compañero va cambiando las figuras que las producen. Una vez que se hayan utilizado todas, el estudiante que vio las sombras dirá qué figura produjo cada una.	• Define la *homotecia*, y menciona sus propiedades. • Identifica dos figuras homotéticas.

Lección 51	Homotecias fraccionarias y negativas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Aquí se introduce el concepto de razón de homotecia negativa. Es importante notar que cuando la razón de homotecia es negativa, la figura homotética y la original están en lados opuestos del centro de homotecia. • Resulta útil distinguir a simple vista si la razón de homotecia es mayor o menor que 1, negativa, o mayor o menor que –1 para detectar fácilmente errores en los trazos o cálculos. • Organice al grupo en equipos y proporcióneles un nuevo juego de memoria: en la mitad de las tarjetas dibuje la figura original en rojo y su figura homotética en azul; en las demás tarjetas escriba las razones de homotecia correspondientes. En su turno, cada equipo volteará dos tarjetas: si una de ellas tiene figuras homotéticas, y la otra, la razón de homotecia correspondiente, entonces recogerá las tarjetas y volteará otro par; en caso contrario, el turno pasará al siguiente equipo.	• Dibuja una figura homotética a otra, con cualquier razón de homotecia. • Identifica figuras homotéticas con razón de homotecia negativa, o fraccionaria.

Lección 52 Cambiar el centro de homotecia

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Esta vez el centro de homotecia no está fuera de la figura, sino dentro de ella. El método para encontrar la razón de homotecia es el mismo; en este tipo de homotecia es más fácil identificar figuras semejantes. • Dibuje en el pizarrón figuras grandes y pida al grupo que describa el proceso para dibujar una figura homotética con razón negativa.	• Construye e identifica figuras homotéticas donde el centro de homotecia está dentro de la figura.

Lección 53 Más sobre homotecia

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En general esta lección es un repaso de los conceptos de homotecia vistos en lecciones pasadas: se trabaja con las propiedades de la homotecia, se construyen figuras con distintas razones de homotecia y se encuentran las razones de homotecia entre figuras. • Puede resultar difícil para el alumno encontrar la razón de homotecia entre dos figuras cuando se conoce la razón con una tercera figura original; para evitar esto, fomente el intercambio de ideas y, si lo considera conveniente, proporcione pistas.	• Determina la razón de homotecia entre dos figuras. • Encuentra el centro de homotecia de dos figuras dadas.

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 8.5.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos • 8.5.6 Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente • 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas • 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera • 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa • 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 54 Curvas en el plano

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se introducen gráficas de funciones no lineales. • Enfatice la relación entre los ejes que representan a la variable independiente *x* y a la variable dependiente (su valor cambia al variar el de *x*) *y*. • Si observa dificultades, proponga graficar más funciones (lineales y no) para identificar las características de cada una.	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente relaciones lineales y cuadráticas.

Lección 55 Gráficas cuadráticas

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Si observan dificultades en la actividad 2, pida al grupo que sustituya los valores de x y verifique qué ecuación pertenece a esas soluciones. • En la actividad 3, solicite que comparen su estimación inicial con las medidas exactas para que el corral tenga la mayor área posible.	• Lee y representa gráfica y algebraicamente relaciones lineales y cuadráticas.

Lección 56 En movimiento

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Esta lección se divide en tres fases. a) A partir de las coordenadas de los puntos de una parábola, se identifica, entre varias, la ecuación que corresponde a este lugar geométrico y después se tabulan otros puntos. b) A partir de la gráfica de una parábola se tabulan puntos y después se identifica la función cuadrática correspondiente. c) A partir de la ecuación, se tabulan puntos y se trazan las gráficas correspondientes. • Cuando se validen, en grupo, las actividades 1 y 2, es importante discutir y justificar las respuestas referentes a la altura del túnel y a la altura y velocidad del cohete. De esta forma los alumnos descubrirán la utilidad de representar algebraicamente una función. • Hay *software* libre en Internet que puede complementar el trabajo en la actividad 1; pues permite observar las curvas correspondientes a las ecuaciones y responder las preguntas planteada.	• Relaciona una parábola con la ecuación cuadrática correspondiente. • Traza una parábola a partir de la ecuación cuadrática correspondiente.

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 8.5.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos • 8.5.6 Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente • 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas • 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera • 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa • 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 57 Llenado de botellas

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• La interpretación de un fenómeno por medio de su gráfica suele confundir al alumno; por ello, ayúdelo a analizar cómo están relacionadas la altura del agua en el recipiente y la cantidad de líquido que hay en él. Resalte que no siempre cambian de manera proporcional (solo es así cuando el recipiente es un prisma recto o un cilindro).	• Identifica relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica. • Interpreta diferentes tipos de gráficas lineales.

Lección 58	El movimiento en gráficas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Mencione al grupo que ahora, a partir de una gráfica, debe extraer información e identificar a qué fenómeno o experimento corresponde dicha gráfica. Esto estimula en gran medida su abstracción matemática.	• A partir de una gráfica, extrae información y reconstruye el acontecimiento.

Otros recursos

Encuentre ejemplos de gráficas relacionadas con la vida cotidiana del alumno en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3A-58

Eje. Manejo de la información
Tema. Nociones de probabilidad
9.3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma) • 9.3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto) • 9.5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	• Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 59 Dados y pelotas

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Si detecta que el grupo no comprende el concepto *eventos independientes*, explique que la independencia de dos eventos A y B significa que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro suceda. Por ejemplo, en cuanto al sexo de los bebés, el que una pareja tenga un primer hijo varón no modifica la probabilidad de que el siguiente sea varón (sigue siendo de 50 por ciento).	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 60 Que sea pulsera, y que sea azul

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Lleve a cabo con el grupo más experimentos de eventos independientes y dependientes para que observe cómo, en el primer caso, el que ocurra uno no modifica la probabilidad de que suceda el otro y, en el segundo, el que uno de ellos ocurra sí modifica la probabilidad de que el otro también pase.	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Bloque 4

Eje. Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema. Patrones y ecuaciones
9.4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.	• Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión.

Lección 61 Figuras con palillos

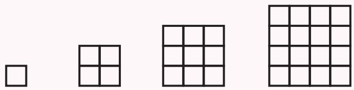
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Se recomienda formar las figuras con palillos para que el alumno distinga qué operación necesita para encontrar el siguiente término de la sucesión, y generalice el método para determinar su expresión algebraica. • Divida al grupo en dos equipos y proponga que jueguen “Ahorcado”. Pida que uno anote en una hoja la expresión de una sucesión y, en el pizarrón, escriba los cuatro primeros términos. Solicite al equipo contrario que mencione los siguientes términos de la sucesión hasta un número *n* decidido de antemano y deduzca su expresión. Por cada falla o error, se dibuja en el pizarrón una parte del muñeco ahorcado, y si éste se completa, el equipo pierde; por el contrario, si deduce la expresión antes de ahorcar al muñeco, los papeles se invierten.	• Encuentra los términos de una sucesión y su expresión algebraica.

Otros recursos
Encuentre ejercicios de sucesiones numéricas para el alumno en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-60

Lección 62 — Sucesiones con figuras

Estrategias de enseñanza y aprendizaje

- En esta lección se presentan sucesiones con figuras para que los estudiantes distingan que la cantidad de elementos varía de acuerdo con una regla que se corresponde con una función cuadrática.
- Es conveniente que analicen la siguiente sucesión antes de resolver las actividades de la lección, ya que aparece con frecuencia.



- Solicite que diseñen una sucesión de figuras, distinta de las sucesiones de las actividades de la lección, que tenga asociada una expresión cuadrática.

Indicadores de desempeño

- Determina la ecuación cuadrática que define el número de elementos que forman los términos de una sucesión de figuras.

Otros recursos

Encuentre un resumen de la sucesión de Fibonacci en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-61

Lección 63 — Sucesiones cuadráticas

Estrategias de enseñanza y aprendizaje

- El propósito de esta lección es analizar el comportamiento de sucesiones cuadráticas, así como determinar los términos de una sucesión de este tipo a partir de su expresión algebraica.
- Con la primera actividad se desea que analicen el comportamiento de las sucesiones cuadráticas y lo comparen con el de las sucesiones lineales, que ya estudiaron en grados anteriores. Haga notar que estas sucesiones no cambian de manera constante y que no siempre son decrecientes o crecientes.
- Si en la actividad 5 los alumnos tienen dificultad para hallar una expresión que no sea totalmente decreciente o creciente, pídales que analicen que, aunque para números pequeños el término lineal puede ser más grande (en valor absoluto) que el cuadrático, con el tiempo el término cuadrático siempre le gana en tamaño al lineal.

Indicadores de desempeño

- Determina los términos de una sucesión a partir de una regla definida con una expresión cuadrática.
- Determina la ecuación cuadrática que define los términos de una sucesión numérica.

Otros recursos

Para encontrar juegos con sucesiones visite el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-62

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Figuras y cuerpos
9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos • 9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto • 9.5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides • 9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	• Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.

Lección 64 Girar una figura produce otra figura

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se estudian los sólidos de revolución y sus propiedades básicas. Fomente en el alumno la capacidad de anticipar la forma y algunas propiedades de los sólidos antes de crearlos. • Para la actividad 1, pida que lleve popotes, cinta adhesiva y figuras hechas de cartulina. • Organice al grupo en equipos para construir otros sólidos de revolución diferentes a los de la actividad 1 cambiando el eje de revolución de las figuras.	• Construye sólidos de revolución con figuras básicas. • Anticipa las formas y algunas características de los sólidos de revolución.

Otros recursos
Encuentre más información de sólidos de revolución en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-64

Lección 65	¿Cómo se hace un cilindro?
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se explican las características que debe tener un desarrollo plano para construir un cilindro específico. Resalte que los lados de los rectángulos que tocan los círculos deben tener una longitud igual a su perímetro. • Organice al grupo en equipos y pida a cada uno que construya cilindros con diferentes radios y alturas, de modo que se noten los cambios al variar estas medidas.	• Diseña y construye desarrollos planos para cilindros.

Otros recursos

Encuentre más información sobre cilindros y conos en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-65

Lección 66	¿Cómo se construye un cono?
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• Esta lección se enfoca en la construcción de conos y la relación entre su altura, ángulo central y radio. • Oriente al alumno para que comprenda las características del cono de forma intuitiva. • En la actividad 3 recuerde que, para construir el cono, se necesita dejar una pequeña pestaña.	• Diseña y construye desarrollos planos para conos.

Otros recursos

Encuentre más información sobre la construcción de un cono en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-66

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

<table>
<tr><th>Contenidos</th><th>Aprendizaje esperado</th><th>Estándar</th></tr>
<tr><td>• 9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo</td><td rowspan="2">• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.</td><td rowspan="5">• Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>• 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>• 9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente</td><td rowspan="3">• Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.</td></tr>
<tr><td>• 9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td>• 9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente</td></tr>
</table>

Lección 67 Ángulo de inclinación y pendiente

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se estudia la tangente de un ángulo y su relación con la pendiente de una recta con ese ángulo de inclinación. • Proponga al alumno que invente ecuaciones de rectas, y en equipo comparen y comenten los resultados usando una tabla como la propuesta en la actividad 3.	• Relaciona la inclinación de una recta con el valor de su pendiente.

Lección 68	Triángulos rectángulos en el plano
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Aquí se explica que la inclinación de una recta se mide con la pendiente, y ésta se calcula al dividir el avance en *y* entre el avance en *x*. • Pida al alumno que a partir de cierto ángulo construya una recta con esa inclinación y obtenga su pendiente. Después, solicite que haga un triángulo rectángulo con un ángulo de esa misma medida y verifique que su tangente sea la pendiente de la recta.	• Identifica que la pendiente de una recta corresponde al cociente de los catetos opuesto y adyacente a su ángulo de inclinación.

Otros recursos

Encuentre más información sobre la tangente de un ángulo en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-68

Lección 69	Más ejercicios sobre tangente y pendiente
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Si lo considera conveniente, aumente el número de casos en la tabla de la actividad 1. • Promueva la discusión grupal para encontrar las reglas de correspondencia. • Sugiera un juego por equipos para anticipar, a partir de las ecuaciones, qué recta tiene mayor ángulo de inclinación.	• Construye una recta con un ángulo de inclinación dado.

Otros recursos

Encuentre una animación para cambiar el ángulo y la pendiente de una recta en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-69

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	• Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.
• 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras		
• 9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	• Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
• 9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo		
• 9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente		

Lección 70 Semejanza y cocientes

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se analizan las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Se recomienda repasar el redondeo de cifras y diferenciarlo de truncar los decimales, ya que esto da variaciones más grandes en los datos. • Procure que el alumno comprenda los términos *cateto opuesto y cateto adyacente a un ángulo*, sin importar la posición de este, pues son la base de los conceptos que se presentan. Con las preguntas de la actividad 2 se pretende orientar al estudiante para que analice las relaciones.	• Define las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Resuelve problemas utilizando las relaciones trigonométricas. • Encuentra el seno, el coseno y la tangente de un ángulo.

Otros recursos
Encuentre animaciones de las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente, en la página www.e-sm.com.mx/GSCM3-70

Lección 71	Los cocientes coinciden
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se analizan y comparan las características de triángulos semejantes; por ejemplo, que los cocientes entre los lados de triángulos semejantes permanecen constantes. Muestre al alumno algún triángulo, pida que construya uno semejante y explique el proceso que siguió para trazarlo.	• Identifica triángulos semejantes.

Otros recursos

Encuentre más información sobre triángulos rectángulos en el sitio www.e-sm.com.mx/GSCM3-71

Eje. Forma, espacio y medida

Tema. Medida

9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	• Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	• Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.
• 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras		
• 9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	• Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
• 9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo		
• 9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente		

Lección 72	Seno, coseno y tangente
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Solicite al alumno que construya un sextante para medir la altura de objetos inaccesibles con ayuda de las relaciones trigonométricas. Necesita un transportador, un tubo de cartón, un pedazo largo de hilo, una goma pesada, cinta adhesiva y un flexómetro. • Para construir el sextante, se une por lo largo, con cinta adhesiva, el transportador al tubo de cartón, se amarra la goma en un extremo del hilo, y el otro extremo se pega con la cinta adhesiva al centro del transportador (en el punto donde se forma el ángulo). • Se observa, a través del tubo, el objeto que se quiere medir, de modo que su punta apenas se vea. Otro alumno medirá el ángulo que forma la plomada con el transportador, la altura a la que se encuentra el sextante y la distancia al objeto.	• Calcula el seno, coseno y tangente de un ángulo.

Lección 73	Calcular ángulos
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Con el sextante se encuentra la altura de objetos utilizando las relaciones trigonométricas seno y coseno. Al formarse un triángulo rectángulo y conocer uno de sus ángulos (el que marca el transportador menos 90°), se obtiene la hipotenusa mediante el coseno del ángulo (la distancia al objeto). Con este procedimiento también se calcula el seno, que es la altura del objeto menos la altura a la que se encuentra el sextante.	• Resuelve problemas utilizando las relaciones trigonométricas.

Lección 74	**El saber da poder**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• La principal dificultad de esta lección está en el planteamiento de las ecuaciones. Los problemas se resuelven en varios pasos, por lo que es probable que el alumno se equivoque. • Se propone también otro método para calcular el área de triángulos, con el que se comprueban las respuestas de la actividad 1. • Mencione que el método de la actividad 2 (localización del epicentro de un terremoto) es similar al que utiliza el GPS para ubicar un punto en la superficie terrestre, que se menciona al inicio del bloque, aunque en el caso del GPS hay tres dimesiones involucradas (esferas en lugar de circunferencias).	• Resuelve problemas matemáticos utilizando el teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Otros recursos

Encuentre más información sobre el teorema de Pitágoras en la página www.e-sm.com.mx/GSCM3-74

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas • 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera • 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa • 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 75 La velocidad como razón de cambio

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• El concepto *razón de cambio* es muy importante, ya que muchos conceptos matemáticos y físicos están basados en él. Repáselo las veces que sea necesarias para que no haya dudas. • Algunos alumnos tienen dificultades para saber qué representa una gráfica o cómo se lee; si lo considera necesario, haga un repaso de cómo graficar y qué significan los ejes.	• Explica el concepto razón de cambio y compara en una gráfica la razón de cambio, en este caso la velocidad, de algunos objetos y su significado.

Lección 76 Variaciones de temperatura

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Es importante que el alumno note que la dirección del cambio en un fenómeno físico define una razón de cambio de diferente signo. • Pida al grupo que proponga fenómenos físicos donde una variable cambie con el tiempo y, si la razón de cambio es constante, sugiera que analice el comportamiento. • Por ejemplo, la cantidad de agua y la altura que alcanza ésta en una alberca de forma irregular, el radio de un cono cuando se recorre de abajo hacia arriba o viceversa, el aumento de peso de un tráiler que se va cargando a ritmo constante, etcétera.	• Relaciona la inclinación de una recta que representa un fenómeno o acción, con la razón de cambio de sus variables.

Lección 77	La pendiente como razón de cambio
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se define formalmente el concepto *pendiente* como razón de cambio y el método para obtener la pendiente de una recta dados cualesquiera dos puntos de ésta. Además, se introduce la idea de que la pendiente puede expresarse en forma de una razón o un ángulo. • Lleve un rotafolio cuadriculado que funcione como plano cartesiano para que el grupo trace las rectas correspondientes y aclare sus dudas.	• Identifica la mayor razón de cambio entre dos variables aunque desconozca la gráfica. • Encuentra la pendiente de cualquier recta dados algunos puntos de ésta.

Eje. Manejo de la información
Tema. Análisis y representación de datos
9.4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación	• Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	• Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media.
• 9.4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión		

Lección 78	El mejor horno
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección el alumno debe analizar datos y discutir para llegar a una conclusión válida. Pida que organice los datos de mayor a menor y observe su desviación.	• Analiza datos en tablas para llegar a una conclusión válida que permita atacar un problema.

Lección 79	Desviación media
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se presenta la desviación media como un recurso para interpretar conjuntos de datos, pues permite analizar un fenómeno y obtener información que no puede deducirse a partir del promedio. • A lo largo de la lección, se explican las diferencias de la desviación media con el rango como medidas de dispersión y la interpretación que debe dárseles.	• Analiza la distribución de datos de un fenómeno.

Lección 80	Anestesia y otros problemas
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se muestra una situación para que el alumno analice los datos obtenidos y saque conclusiones válidas sobre el fenómeno. • Solicite que elaboren una tabla con los puntajes obtenidos por el grupo en algún examen y analicen la dispersión de los datos. • Pida que comparen la desviación media y presenten sus conclusiones.	• Analiza e interpreta datos para obtener conclusiones válidas acerca de una situación dada.

Bloque 5

Eje. Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema. Patrones y ecuaciones
9.5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada	• Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.	• Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Lección 81 **La traducción de los problemas**

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se profundiza en el planteamiento y la resolución de problemas a partir de los conocimientos adquiridos anteriormente. Para el alumno será más difícil plantear las ecuaciones correctas; por ello, sugiera retomar lo que sabe de traducción del lenguaje común al algebraico. • Lea los problemas con quienes tengan mayores dificultades y ayúdelos mediante preguntas guiadas. • Cuando terminen los ejercicios, propicie que discutan sus métodos en el pizarrón para detectar errores y confusiones en los conceptos.	• Modela matemáticamente situaciones y problemas para resolverlos.

Lección 82	**De todo un poco**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección hay actividades que involucran el planteamiento y la resolución de ecuaciones. En ocasiones será necesario que el grupo traslade el problema a lenguaje algebraico para plantear y resolver la ecuación. Es posible elaborar enunciados parecidos a los que se presentan cambiando solo los valores numéricos. Fomente que sean problemas que involucren situaciones y contextos novedosos. Pida poner especial atención al plantearlos. • En algunos problemas hay opciones muy parecidas; esto permite detectar algunos errores comunes.	• Plantea y resuelve problemas con ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.5.3 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	• Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.
• 9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto		
• 9.5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides		
• 9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas		

Lección 83	**El volumen del cilindro**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Esta lección se enfoca en la construcción de cilindros y la obtención de su volumen. Recuerde al alumno que los lados de los rectángulos que tocan los círculos miden lo mismo que el perímetro de estos (tapas). • Organice al grupo en equipos y pida a cada uno que construya cilindros con diferentes medidas. Solicite después que calcule el volumen de los cilindros elaborados por los demás.	• Construye un cilindro con dimensiones específicas. • Calcula volúmenes de cilindros.

Lección 84	**Un cono a la medida**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Analizar la relación entre un cono con radio de la base y altura iguales a la de un cilindro permite deducir cómo es el volumen del cono. • Como actividad complementaria, mencione que cuando un animal se lastima, se le coloca un cono en su cuello para que no toque o lama su herida. Pregunte qué dimensiones (altura y radio de la base) debe tener dicho objeto según el tipo de animal.	• Calcula el volumen de un cono. • Conoce la relación entre los volúmenes de un cono y un cilindro con altura y radio iguales.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos • 9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto • 9.5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides • 9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	• Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.

Lección 85	**Cortes con formas inesperadas**
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Guíe a los alumnos para que aprendan a anticipar la forma de los cortes que se hacen en cuerpos como el cilindro, la esfera y el cono con el objetivo de obtener figuras planas y curvas. • Enfatice el procedimiento en el cono, pues de él se obtienen las curvas cónicas (parábola, hipérbola y elipse) que los estudiantes retomarán en bachillerato. • Solicite que construyan otras figuras en plastilina, haga cortes en diferentes lugares y dibuje en una hoja las figuras obtenidas.	• Anticipa la forma y algunas características de los cortes hechos a sólidos tridimensionales.

Lección 86 Recipientes cónicos

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Los problemas se resolverán usando conceptos vistos anteriormente: *semejanza de triángulos y proporcionalidad*. • Es importante que conozcan la fórmula para calcular el volumen del cono. En la lección hay recordatorios al respecto; si considera que falta profundizar más, hágalo con quienes presenten mayores dificultades. • Plantee más preguntas que ayuden al alumno a entender las características del cono. Si observa dificultades, pida que haga un esquema similar al de la actividad 1 con el fin de que tenga más elementos para contestar las preguntas.	• Obtiene las medidas de los radios de círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Eje. Forma, espacio y medida
Tema. Medida
9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	• Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.
• 9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto		
• 9.5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides		
• 9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas		

Lección 87 — Volúmenes y capacidades

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Los alumnos resolverán problemas relacionados con el volumen de conos y cilindros. Para ello, primero se les pide aproximar los valores con el fin de estimar el volumen real. Después, deben efectuar los cálculos formales y contrastarlos con su estimación. • Comente el volumen de algunos objetos cotidianos para que los datos obtenidos tengan un significado para el grupo.	• Calcula volúmenes de conos y prismas. • Resuelve problemas relacionados con el cálculo de volúmenes y prismas.

Lección 88 — Cilindros y conos imaginarios

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se analizan cilindros imaginarios formados al rotar figuras en diferente posición. Al modificar esta se obtiene un sólido de revolución diferente cuyo volumen es distinto. • El alumno anticipará el cambio en la forma de los cilindros al modificar las figuras que los componen. • Guíe al grupo para que construya el sólido de revolución de la actividad 4. Pida que compare los sólidos formados al cambiar el eje de rotación y obtenga su volumen.	• Calcula volúmenes de cilindros y conos. • Compara los volúmenes de los sólidos formados por las mismas figuras en diferentes posiciones.

Eje. Manejo de la información
Tema. Proporcionalidad y funciones
9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad • 9.1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas • 9.3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos • 9.3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera • 9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa • 9.5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	• Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 89 Cantidades que cambian y se relacionan

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• Oriente a los alumnos para que aprendan a disgregar el problema a partir de las preguntas y, con la información obtenida, a plantear la ecuación que permite resolverlo. • Comente en plenaria cómo se encontró la respuesta en cada problema; esto ayudará al grupo a entender por qué se obtuvo la ecuación correspondiente.	• Dado un problema, plantea la ecuación que permite resolverlo, y encuentra sus soluciones.

Lección 90	Índice de Masa Corporal
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	**Indicadores de desempeño**
• En esta lección se introduce un método para determinar el índice de masa corporal (IMC) con el peso y la altura de una persona; también se muestra cómo calcular el rango de peso en que se encuentra (insuficiente, normal, sobrepeso y obesidad) a partir del IMC. • Al haber visto en grados anteriores conceptos de nutrición, es probable que el alumno tenga elementos para sacar conclusiones desde el principio. Sin embargo, conviene que fomente el intercambio de ideas para recordar los conocimientos previos y entender la relación cuadrática que se expone. • Comente y analice la gráfica de la actiniad 3 junto con el grupo. Plantee preguntas que permitan entenderla; por ejemplo: “¿Por qué las curvas que modelan la situación son parábolas?, ¿por qué cada vez se separan más?”.	• Analiza y representa geométrica y algebraicamente, relaciones cuadráticas.

Eje. Manejo de la información
Tema. Nociones de probabilidad
9.5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Contenidos	Aprendizaje esperado	Estándar
• 9.2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	• Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
• 9.3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)		
• 9.5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables		

Lección 91 Juegos equitativos I

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se analizan varias reglas de un juego de azar para determinar cuáles son justas y cuáles no. • En la actividad 1 es importante determinar el espacio muestral del lanzamiento de dos dados para notar por qué el juego no es justo. • Algunas opciones de respuesta de la actividad 2 implican modificar los eventos que hacen avanzar a cada jugador, como los siguientes ejemplos. – Si la diferencia entre los puntos es 1 o 5, avanza el jugador A. – Si la diferencia entre los puntos es 2 o 4, avanza el jugador B. – Si la diferencia entre los puntos es 0 o 3, avanza el jugador A. • Estas estrategias son válidas, pues tratan de equilibrar las probabilidades de cada jugador. • También es válido, como se propone en la actividad 3, modificar únicamente la longitud de la carrera para que cada jugador recorra una cantidad de casillas proporcional a la probabilidad que tiene de avanzar en cada tirada. Por ejemplo, que el jugador C gane hasta llegar a la casilla 20 mientras que A y B ganen al llegar a la casilla 10 (como C tiene el doble de probabilidad que A y B, su meta está al doble de distancia). • La estrategia más complicada es cambiar sólo la cantidad de casillas que avanzan los jugadores en cada tirada; la distancia avanzada debe ser inversamente proporcional a su probabilidad de avance. Por ejemplo, como el jugador C tiene el doble de probabilidad que los jugadores A y B, debe avanzar la mitad de casillas por tirada.	• Determina si un juego es justo o injusto. • Modifica las reglas de un juego injusto para que sea justo.

Lección 92 Juegos equitativos II

Estrategias de enseñanza y aprendizaje	Indicadores de desempeño
• En esta lección se analizan más condiciones para determinar si un juego de azar es justo o no. • Pida que formen equipos de tres o cuatro participantes, y que inventen dos juegos: uno justo y otro que no lo sea. Plantee preguntas que los ayuden a profundizar en el tema y analizar los juegos propuestos: “Si se altera el número de participantes, ¿cambiarán las reglas para que un juego siga siendo justo? ¿Cuál sería la modificación? ¿Qué cambiarían para que un juego sea justo?”.	• Determina qué reglas hacen que un juego sea justo o no.

Notas

Notas

conect@ estrategias

Matemáticas 3

Silvia García Peña
Tatiana Mendoza von der Borch
José Cruz García Zagal
David Block Sevilla

sm

DIRECCIÓN DE CONTENIDOS Y SERVICIOS EDUCATIVOS
Elisa Bonilla Rius

GERENCIA DE PUBLICACIONES ESCOLARES
Felipe Ricardo Valdez González

AUTORES
Silvia García Peña, Tatiana María Mendoza Von der Borch
José Cruz García Zagal, David Francisco Block Sevilla

COORDINACIÓN EDITORIAL
Ernesto Manuel Espinosa Asuar

EDICIÓN
Cristóbal Bravo Marván

ELABORACIÓN DE EVALUACIONES DE OPCIÓN MÚLTIPLE , ACTIVIDADES CON TECNOLOGÍA Y SELECCIÓN DE ENLACES WEB
Eric Ruíz Flores González, Valentina Muñoz Porras

REVISIÓN TÉCNICA
Armando Solares Rojas

REVISIÓN DE EVALUACIONES DE OPCIÓN MÚLTIPLE
Instituto de Evaluación y Asesoramiento
Educativo (IDEA)

COLABORACIÓN
Mónica de Lourdes Valencia
(páginas 68, 69, 106, 107, 158 y 159)

COORDINACIÓN DE CORRECCIÓN
Abdel López Cruz

CORRECCIÓN
Juan Eduardo Jiménez Zurita
Ricardo Maldonado Gutiérrez

DIRECCIÓN DE ARTE
Quetzatl León Calixto

DISEÑO DE LA SERIE Y PORTADA
Brenda López Romero

COORDINACIÓN GRÁFICA
César Leyva Acosta

DIAGRAMACIÓN
César Leyva Acosta

COORDINACIÓN DE ICONOGRAFÍA E IMAGEN
Ricardo Tapia

ICONOGRAFÍA
Alejandra Amador, Abril García, Ilia Muñoz

FOTOGRAFÍA
© 2013, Carlos A. Vargas, © Thinkstock, 2013
© Other Images, 2013, © Archivo SM, 2013
© Francisco Palma, 2013

DIGITALIZACIÓN Y RETOQUE
Carlos Alberto López Hernández

PRODUCCIÓN
Carlos Olvera, Víctor Canto, Lilia Alarcón

Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias
Primera edición, 2013

Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, México, D. F.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

¿Qué es **hacer matemáticas**? Diseñar un vitral, medir la superficie de un terreno, averiguar la tarifa telefónica más conveniente, decidir si un juego de dados es justo e interpretar los datos de una gráfica en una noticia del periódico son algunos de los muchos casos en que hacemos matemáticas.

También **hacemos matemáticas** cuando contestamos preguntas propias de esta disciplina; por ejemplo: ¿existe un número que multiplicado por 5 dé un resultado menor que 5? ¿Las medidas de los lados de un triángulo pueden ser tres números cualesquiera? ¿La suma de dos números impares consecutivos siempre es múltiplo de cuatro?…

Hacer matemáticas es usar los conocimientos de esta disciplina para resolver ciertos problemas, y también es crear nuevos conocimientos, cuando los que se tienen son insuficientes.

Hacer matemáticas es, asimismo, una buena manera de aprenderlas. Por ello, en este libro te proponemos numerosas cuestiones que pueden resolverse con su ayuda. Nos interesa que aprendas matemáticas y las consideres como una herramienta para pensar.

Presentación para el alumno

Cuando afrontas problemas nuevos debes sentirte con la libertad de poner en práctica lo que se te ocurra para resolverlos; por ejemplo, apoyarte en dibujos, ensayar resultados o procedimientos y, cuando éstos no funcionen, probar otra vez. Poco a poco, al resolver más problemas, al conocer cómo proceden tus compañeros y con la ayuda del profesor, mejorará la manera en que los resuelves: será cada vez más ordenada, sistemática y comprobable. Es decir, harás mejores matemáticas.

Para aprender matemáticas es recomendable combinar el estudio individual con el trabajo en parejas, en equipos y en grupo.

- Al afrontar una nueva tarea es bueno que reflexiones; después, es importante que compartas tus ideas y dudas con los otros. Trabajar en parejas o en equipos puede serte muy útil para avanzar.
- El hecho de explicar al grupo tus procedimientos o los de tu equipo, conocer lo que hicieron otros equipos, decidir juntos si los resultados son correctos y atender los aportes del profesor, te ayudará mucho a aprender.
- También es importante que, en algún momento, averigües si puedes hacer tú solo la tarea.

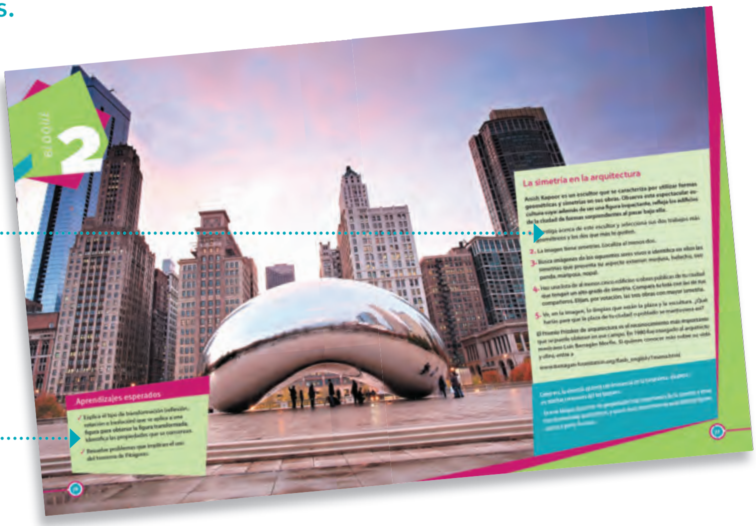
A lo largo del libro se sugiere el trabajo en grupo, en equipo o en parejas. Sin embargo, es el profesor quien indicará el tipo de organización más adecuado para cada momento.

Esperamos, igual que todos los autores que escriben para jóvenes como tú, que este libro, además de ayudarte a aprender, te anime a exclamar: "¡Esto sí me gusta!".

Los autores

Guía de uso

Conect@ Estrategias está estructurado en cinco bloques, que tienen los siguientes elementos.



Entrada de bloque

Se presenta un contexto histórico o una situación cercana a ti, y se plantean preguntas para fomentar el uso de las competencias matemáticas. El contexto de esta sección se retoma al final del bloque, en la evaluación tipo PISA. También se enumeran los aprendizajes esperados del bloque.

Los contenidos se desarrollan en secuencias didácticas de varias lecciones. Cada secuencia cuenta con...

Número de bloque, de secuencia y de lección

Las secuencias se numeran por bloque. La numeración de las lecciones es continua en todo el libro.

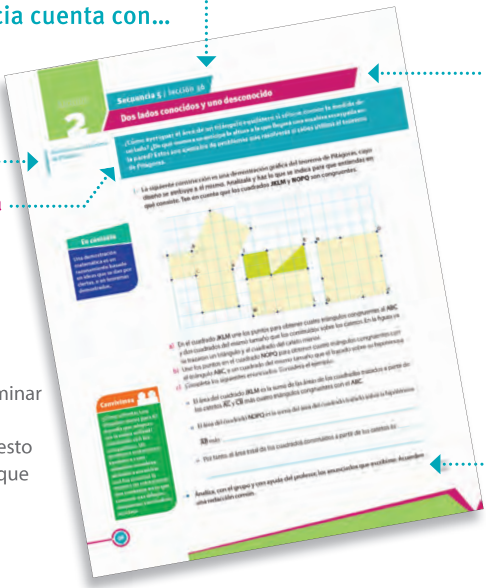
Nombre de la lección

Contenido

Se indica el contenido que trabajarás en la secuencia.

Introducción a la secuencia

En la primera lección de cada secuencia se destaca algún aspecto sobresaliente del conocimiento que estudiarás. Lee la información junto con un compañero y, si es necesario, respondan las preguntas. Al terminar la secuencia, vuelve a leer la información, coméntala con el resto del grupo y contrástenla con lo que aprendieron en la lección.



Puestas en común

Es el momento en el que compararás, argumentarás y validarás tus respuestas en equipo o en grupo.

En las secuencias se intercalan cápsulas que fomentan la reflexión y el análisis, plantean retos y fortalecen las habilidades.



Una pista
Sugerencias para la resolución de algún problema o ejercicio con cierto grado de dificultad.

Ya sabemos...
Recordatorio de conceptos o técnicas que ya conoces.

Conceptos
Contiene información relevante como conceptos, técnicas o las fórmulas que usarás en la lección.

Reflexionamos
Preguntas que ayudan a profundizar en el aprendizaje de los contenidos. Respóndelas junto con un compañero, justifiquen su respuesta en su cuaderno y anoten las dificultades que tuvieron para hacerlo.

Evaluaciones de contenidos
Reactivos de opción múltiple para repasar, consolidar y evaluar lo que sabes hacer.

En contexto
Se muestran contextos en los que se usan los conocimientos matemáticos que estás trabajando. A veces también se explica un concepto, se da una definición relacionada con la actividad o se sugieren libros de la Biblioteca Escolar y de la Biblioteca de Aula relacionados con el contenido que se trabaja en la lección.

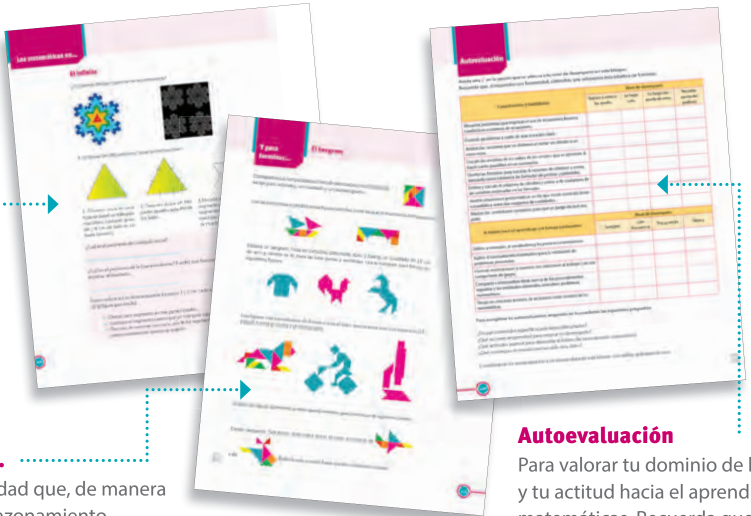
Convivimos
En cada bloque se hacen sugerencias que apoyan el desarrollo de las actitudes y valores que forman parte de tus competencias matemáticas. Comenta con tu grupo de qué forma las llevarán a cabo.

Conect@mos
Sugerencias de actividades relacionadas con el uso de las TIC. Del 8 al 17 de noviembre de 2013 se verificó que todos los vínculos siguieran activos.

Evaluaciones tipo PISA
Podrás hacerlas de forma individual o en equipo. Es importante que, en cada una, justifiques tus respuestas y procedimientos desarrollados.

Guía de uso

Al finalizar cada bloque, encontrarás otras tres secciones.



Las matemáticas en...

Se proponen situaciones de la vida cotidiana, la naturaleza, la música, y de otros ámbitos en los que, sorprendentemente, hay un conocimiento matemático implicado.

Y para terminar...

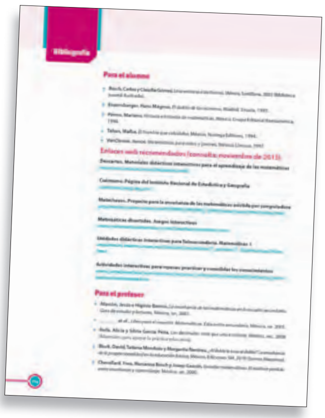
Contiene una actividad que, de manera lúdica, fomenta el razonamiento matemático en la resolución de problemas.

Autoevaluación

Para valorar tu dominio de los contenidos y tu actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas. Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Al final del libro, encontrarás las siguientes secciones.





Glosario

Definiciones útiles que utilizarás en las secuencias didácticas.

Bibliografía para el profesor

Sugerencias de bibliografía y enlaces web para el profesor.

Bibliografía para el alumno

Te proponemos algunas referencias bibliográficas y sitios web para que repases y consolides tus aprendizajes.

Presentación para el profesor

Presentamos el enfoque didáctico que rigió la elaboración de las secuencias de lecciones de ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** y, enseguida, la estructura de los libros.

El enfoque didáctico

La serie ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** busca propiciar de manera significativa el desarrollo de las siguientes competencias.

1. Resolver problemas de manera autónoma
2. Comunicar información matemática
3. Validar procedimientos y resultados
4. Manejar técnicas eficientemente

A continuación se explica en qué consiste cada una y cómo se llevarán a cabo.

Resolver. Los enfoques contemporáneos para la enseñanza de las matemáticas tienden a coincidir en que, para lograr el aprendizaje significativo de un conocimiento, es necesario que éste aparezca como respuesta a una pregunta o como solución a una problemática que los estudiantes ya hayan afrontado. Se considera también que, en muchos casos, al afrontar una problemática adecuadamente, los alumnos desarrollan por sí mismos conocimientos aproximados al ideal.

Por ello, las lecciones de ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** comienzan con el planteamiento de uno o varios problemas. Sólo después, y paulatinamente, se presenta la información relativa al conocimiento tratado.

¿Cómo solucionarán los estudiantes un problema si todavía no se les enseña el conocimiento que lo resuelve? Los problemas que se plantean antes de dar información suficiente han sido diseñados o seleccionados para que puedan resolverlos aunque no dispongan de la herramienta óptima. Esto significa que tal vez se aproximen a la solución con herramientas más elementales, o bien, que aun cuando no puedan resolverlos identifiquen una limitación en sus conocimientos previos y la necesidad de uno nuevo.

Después de analizar los problemas iniciales, conforme se introducen aspectos del nuevo conocimiento, es conveniente que los estudiantes resuelvan más problemas y ejercicios para aplicar dichos aspectos y afirmarlos. Cuando usted lo considere necesario, puede complementar los problemas y ejercicios de aplicación que se proponen con otros que diseñe o tome de otros materiales.

Comunicar. Al resolver problemas, los conocimientos se generan muchas veces de manera silenciosa, implícita, al menos parcialmente. Por ello, una fase importante en los procesos de aprendizaje de nociones matemáticas consiste en explicitar esos conocimientos, nombrarlos, representarlos y, también, adoptar convenciones.

Para dar lugar a la diversidad de procesos relacionados con la comunicación, en ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** se apela a varios recursos: en cada lección se propone el trabajo en parejas o equipos, o la modalidad de una puesta en común de procedimientos y resultados. En esos momentos los estudiantes construyen formulaciones con sus propias palabras y aprenden de sus compañeros. Cabe recordar que diferentes formas de resolución ponen en juego distintas relaciones entre los datos, y conocer y analizar la resolución de otros datos ayuda a comprender mejor algunas nociones, a considerarlas desde distintos puntos de vista. Las puestas en común también constituyen el momento ideal para que usted introduzca las formas convencionales de representación.

Además, para atender a la necesidad de crear un lenguaje matemático y perfeccionar su uso, se proponen situaciones en las que, como parte integral de una tarea matemática, los estudiantes deben comunicar algo a alguien, como dar instrucciones para construir una figura geométrica.

Otro aspecto más que suele vincularse con la capacidad de comunicación es la posibilidad de expresar ideas matemáticas e interpretarlas en distintos tipos de representación: gráfica tabular, numérica, geométrica y algebraica, entre otros.

Validar. ¿Cómo se sabe, en clase de Matemáticas, qué es correcto y qué es incorrecto? ¿Quién lo decide? Otra característica fundamental del quehacer matemático es el desarrollo de formas de probar que algo es correcto, verdadero. A la vez, esta característica ofrece una oportunidad formativa única: se trata de que usted ponga en manos de los estudiantes los medios para que aprendan a determinar la validez de sus procedimientos y resultados.

No es cuestión todavía de enseñar a los estudiantes a que hagan demostraciones formales, pero sí de que sientan la necesidad de probar las aserciones con los recursos que tengan a la mano. En ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** se proponen dos maneras de validar.

• Mediante una prueba empírica. Por ejemplo, la manera empírica de apreciar si las medidas de una figura a escala son correctas consiste en comparar visualmente su forma con la original; la prueba empírica de que un número es solución de una ecuación consiste en sustituir el valor en la ecuación y comprobar si se obtiene una igualdad. Estas maneras de "probar" se nombran, frecuentemente, como verificar. Las pruebas claramente no son demostraciones, pero juegan un papel importante en los procesos de búsqueda, al permitir que los estudiantes pongan a prueba conjeturas, razonamientos.

• Por medio de validación semántica. Su principal característica es que se basa en argumentos; por ejemplo: "la suma de dos números impares es par, puesto que si restas una unidad a cada uno, obtienes dos números pares, y además, un dos…". Se espera que, conforme avanzan en el conocimiento de los distintos temas, los estudiantes puedan hacer este tipo de validaciones con más frecuencia.

Manejar técnicas. El desarrollo de técnicas y su aplicación en la resolución de problemas constituye otra característica del trabajo en matemáticas. En ***Conect@ Estrategias. Matemáticas*** se ha puesto especial cuidado en la diversidad de técnicas por varias razones: ocurre con frecuencia que las técnicas más rápidas o más elaboradas para resolver ciertos problemas parecen fáciles de utilizar, pero son difíciles de comprender (por ejemplo, el algoritmo de la multiplicación por decimales o la regla de tres); tal dificultad hace que los estudiantes tengan poco control sobre su uso y, en consecuencia, alteren los pasos. Otras

técnicas, en cambio, aunque más precarias por ser más largas o menos sistemáticas, son más fáciles de comprender; incluso, en ocasiones, las pueden establecer por sí mismos. Estas técnicas cumplen varias funciones: ayudan a consolidar la comprensión del tema; en ciertos casos, algunas son más económicas que la técnica más avanzada; y además, constituyen una herramienta "de emergencia" para los casos en que olviden la más avanzada. A final de cuentas, ¿qué procedimiento es mejor? Esto depende tanto del tipo de problema como de los conocimientos de quien resuelve. Por ello, los estudiantes que han desarrollado varios procedimientos tienden a ser más exitosos en la resolución de problemas.

Estructura y otras características de la obra

El libro está organizado en cinco bloques; en cada uno hay contenidos de los tres ejes temáticos. Las lecciones se agrupan en secuencias didácticas de entre dos y cinco lecciones cada una. En cada secuencia se presenta un aspecto nuevo de un tema, se desarrolla y se cierra, lo que no impide que en otro grupo de lecciones se retome algún punto del mismo tema.

Además, como apoyo a su labor docente, hemos pensado en algunos elementos dirigidos a un aspecto en específico.

• Para la planificación de la enseñanza incluimos una propuesta de dosificación de las lecciones. En ésta se consideró que algunas lecciones son más complejas que otras, y la revisión de su contenido puede requerir dos o hasta tres clases.

• Para la evaluación continua indicamos, en el índice, los contenidos (conocimientos y habilidades) con el fin de facilitar su identificación y seguimiento.

Esperamos que ***Conect@ Estrategias. Matemáticas 3*** constituya un apoyo en sus clases, una herramienta que enriquezca su acervo matemático y didáctico, y, sobre todo, que se convierta en una fuente de aprendizaje y experiencias significativas para los estudiantes.

Los autores

Dosificación

Ya que el tiempo que dedica a cada secuencia depende, en gran parte, de su forma de trabajo y de las características de sus grupos, esta tabla es una propuesta que usted podrá modificar de acuerdo con el ritmo del grupo, las fechas de entrega de calificaciones y las eventualidades (suspensiones, juntas, etc.) que surjan. En aquellas semanas en que el tiempo lo permita, podrá trabajar las actividades de "Las matemáticas en…", así como "Y para terminar…", o bien,

BLOQUES	SEMANAS 1	SEMANAS 2	SEMANAS 3	SEMANAS 4
1	**Secuencia 1** Problemas con ecuaciones cuadráticas **(lecciones 1-3)**	**Secuencia 2** Figuras congruentes o semejantes **(lecciones 4-7)**	**Secuencia 3** Criterios de congruencia y semejanza **(lecciones 8-10)**	**Secuencia 4** Representaciones de relaciones de proporcionalidad **(lecciones 11-13)**
2	**Secuencia 1** Resolución por factorización de ecuaciones cuadráticas **(lecciones 26-28)**	**Secuencia 2** Rotación y traslación de figuras **(lecciones 29-31)**	**Secuencia 3** Construcción de diseños con simetría axial, central, rotación y traslación **(lecciones 32-33)**	**Secuencia 4** Cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo **(lecciones 34-35)**
3	**Secuencia 1** Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas **(lecciones 40-42)**	**Secuencia 2** Problemas de criterio y semejanza de triángulos **(lecciones 43-45)**	**Secuencia 3** Teorema de Tales **(lecciones 46-49)**	**Secuencia 3** Teorema de Tales **(lecciones 46-49)** **Secuencia 4** Construcción de figuras homotéticas **(lecciones 50-53)**
4	**Secuencia 1** Expresión general cuadrática para el enésimo término de una sucesión **(lecciones 61-63)**	**Secuencia 2** Cuerpos que se generan al girar, sobre un eje, desarrollos planos **(lecciones 64-66)**	**Secuencia 3** Pendiente de una recta; ángulo que se forma con la abscisa y el cociente de los catetos **(lecciones 67-69)**	**Secuencia 4** Relaciones entre ángulos agudos y cocientes de los lados de un triángulo **(lecciones 70-71)**
5	**Secuencia 1** Ecuaciones lineales y cuadráticas, o sistemas de ecuaciones para resolver problemas **(lecciones 81-82)**	**Secuencia 2** Fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos **(lecciones 83-84)**	**Secuencia 3** Secciones que se obtienen al hacer cortes a un cilindro o a un cono recto **(lecciones 85-86)**	**Secuencia 4** Cálculo del volumen de cilindros y conos **(lecciones 87-88)**

En el bloque 5, se trabaja primero con las fórmulas para calcular el volumen de conos y cilindros (secuencia 2), pues éstas se retoman en la secuencia 3 para calcular volúmenes de conos truncos y matraces cónicos.

adelantar el trabajo de otros contenidos, si considera que no es suficiente el tiempo asignado en la tabla.
Los colores de la tabla señalan el eje al que corresponde cada contenido: en azul, el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico; en anaranjado, Forma, espacio y medida; y en verde, Manejo de la información. Cabe decir que la redacción de los contenidos ha sido simplificada.

SEMANAS				
5	6	7	8	9
Secuencia 5 Relaciones de variación cuadrática **(lecciones 14-17)**	**Secuencia 6** Eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes **(lecciones 18-22)**	**Secuencia 6 (lecciones 18-22)** **Secuencia 7** Población de estudio y muestreo **(lecciones 23-25)**	**Secuencia 7** Población de estudio y muestreo **(lecciones 23-25)**	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación (páginas 70-74)**
Secuencia 5 Teorema de Pitágoras **(lecciones 36-37)**	**Secuencia 6** Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y complementarios **(lecciones 38-39)**	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación (páginas 108-112)**		
Secuencia 4 Construcción de figuras homotéticas **(lecciones 50-53)**	**Secuencia 5** Gráficas de funciones cuadráticas **(lecciones 54-56)**	**Secuencia 6** Gráficas formadas por rectas y curvas **(lecciones 57-58)**	**Secuencia 7** Probabilidad de eventos independientes **(lecciones 59-60)**	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación (páginas 160-164)**
Secuencia 5 Razones trigonométricas, seno, coseno y tangente **(lecciones 72-74)**	**Secuencia 6** Razón de cambio de procesos con funciones lineales **(lecciones 75-77)**	**Secuencia 7** Desviación media y rango como medidas de dispersión **(lecciones 78-80)**	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación (páginas 210-214)**	
Secuencia 5 Variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades **(lecciones 89-90)**	**Secuencia 6** Condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo **(lecciones 91-92)**	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación (páginas 244-248)**		

Índice

Índice

sm

Índice

Índice



BLOQUE 1

Aprendizajes esperados

- ✓ Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



El ADN resolverá el caso

Se ha cometido un asesinato y la policía llega a la escena del crimen. Con mucho cuidado, los científicos analizan todos los detalles. Las pruebas son insuficientes y el caso parece difícil. De pronto, la inspectora murmura: “Aquí hay un cabello. Rápido, llévenlo al laboratorio para una prueba de ADN. ¡Ya lo tenemos!”.

El ADN (ácido desoxirribonucleico) es una molécula presente en el núcleo de las células de todos los seres vivos. Al comparar el ADN de dos individuos, los científicos pueden determinar con una certeza superior a 99% si hay parentesco entre ellos. Basta una pequeña muestra de células (cabellos, gotas de sangre, restos de saliva…) para hacer la prueba.

1. La imagen representa una molécula de ADN. Describe su estructura.
2. Además del establecimiento de parentesco, ¿para qué sirve conocer la molécula del ADN?
3. Una secuencia de ADN puede contener cuatro tipos de base nitrogenada: adenina (A), timina (T), citosina (C) y guanina (G), y se representa como una palabra larguísima con esas letras (CTAAAGATGAT…). Construye todas las secuencias de una y dos letras que se pueden formar con las cuatro letras anteriores (puedes repetirlas). ¿Cuántas secuencias hay? ¿Y con cinco letras?
4. ¿Es probable encontrar dos secuencias idénticas? Comparte tus argumentos con tus compañeros.
5. Investiga qué es el Proyecto Genoma Humano y qué ha aportado al mundo de la ciencia. Averigua también qué controversias ha generado.

Escribe tus conclusiones y debátelas con tus compañeros.

Para conocer la participación mexicana en el Proyecto Genoma Humano entra a

www.explorandomexico.com.mx/about-mexico/8/279/

La probabilidad es fundamental en muchos ámbitos de la vida, pues gracias a ella se hacen predicciones bastante confiables (aun sin tener certeza absoluta).

En este bloque aprenderás a medir la probabilidad de que un evento ocurra, así como algunos conceptos nuevos de probabilidad.

BLOQUE 1

Secuencia 1 / lección 1

Áreas y ecuaciones

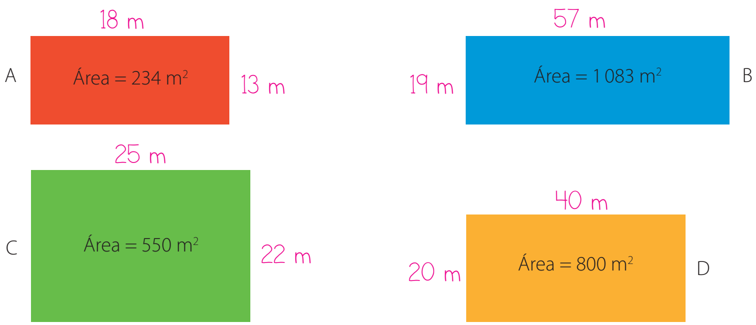
CONTENIDO Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Seguramente has notado que las ecuaciones de primer grado resultan útiles para resolver algunos problemas; sin embargo, en algunos casos es necesario usar otro tipo de ecuaciones, las cuales conocerás en esta secuencia.

resolver

1. Trabaja en equipo. Analicen la información de cada rectángulo. En cada caso, averigüen y anoten cuánto miden los lados de la figura. Usen la estrategia que prefieran y, si lo requieren, verifiquen las respuestas con calculadora.

Rectángulo A: el largo mide 5 metros más que el ancho.
Rectángulo B: el largo mide el triple del ancho.
Rectángulo C: el ancho mide 3 metros menos que el largo.
Rectángulo D: el ancho mide la mitad del largo.



- Verifiquen, en grupo y con ayuda del profesor, que las medidas encontradas sean correctas por dos razones:
  - **a)** al multiplicarlas se obtiene el área;
  - **b)** al compararlas se cumple la relación que se indica; por ejemplo, en el rectángulo A, el largo mide 5 m más que el ancho.

2. Las relaciones entre los lados de los rectángulos a veces se expresan con literales. Por ejemplo, si el ancho del rectángulo A mide x, ¿cuánto medirá el largo? $x + 5$ Entonces el área quedará expresada como $x(x + 5)$, ¿por qué? R. T. Se multiplica ancho por largo.

3. Escriban la ecuación que relaciona las medidas de los lados de cada rectángulo con su área y simplifíquenla, como se hizo con la figura A. Si proponen diferentes ecuaciones, analicen por qué. R. T. La x es el ancho en B, es el largo en C y D.

Rectángulo A:	$x(x + 5) = 234$	$x^2 + 5x = 234$
Rectángulo B:	$3x(x) = 1083$	$3x^2 = 1083$
Rectángulo C:	$x(x - 3) = 550$	$x^2 - 3x = 550$
Rectángulo D:	$x(\frac{x}{2}) = 800$	$\frac{x^2}{2} = 800$

sm

4. Verifiquen, en cada caso, que el valor encontrado para la incógnita x en la actividad 1 satisfaga la ecuación correspondiente.

A: $x^2 + 5x = 234$ — $(13)^2 + 5(13) = (169) + (65) = 234$

B: $3x^2 = 1083$ — $3(19)^2 = 3(361) = 1083$

C: $x^2 - 3x = 550$ — $(25)^2 - 3(25) = 625 - 75 = 550$

D: $\frac{x^2}{2} = 800$ — $\frac{(40)^2}{2} = \frac{1600}{2} = 800$

a) Las ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones de segundo grado*. Expliquen por qué suponen que reciben ese nombre y qué las distingue de las de primer grado.

R. P.

- Comparen sus respuestas con las de los demás equipos. Redacten, en el pizarrón y con base en sus explicaciones de por qué las ecuaciones de segundo grado reciben ese nombre, una explicación común que convenza a todos.

conect@mos

Practica las ecuaciones de segundo grado en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/proyector/actividad.html

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, la expresión algebraica que escribiste en la pregunta 9.

5. Formulen una ecuación de segundo grado que corresponda a cada problema y resuélvanla con los procedimientos que usan para las ecuaciones de primer grado. Si resultan insuficientes, obtengan las soluciones por tanteo. R. T.

técnicas

a) El área de un cuadrado es 182.25 m². ¿Cuánto mide cada lado?

Ecuación: $x^2 = 182.25$ Medida de un lado: 13.5 m

b) El área de un rectángulo es 400 m². Si el largo mide el cuádruple del ancho, ¿cuáles son sus medidas?

Ecuación: $4x^2 = 400$ Largo: 40 m

Ancho: 10 m

c) El área de un rombo es 169 m². Si la diagonal mayor mide el doble de la menor, ¿cuánto mide cada una?

Ecuación: $\frac{x(2x)}{2} = 169$ Medida de la diagonal mayor: 26 m

Medida de la diagonal menor: 13 m

Una pista

¿Qué relación hay entre el área de un rombo y el producto de sus diagonales?

- Lean, en grupo, la siguiente información. Encuentren otra solución para la ecuación de segundo grado e intenten hallar el valor de x para la ecuación de tercer grado.

Para la ecuación de segundo grado $x = 10$ y para la ecuación de tercer grado $x = 2$.

Una ecuación como $x^2 + 3x = 130$ es de segundo grado porque el mayor exponente de la incógnita es dos. En cambio, la ecuación $x^3 + 2 = 10$ es de tercer grado, pues el mayor exponente de la incógnita es tres.
Un número que satisface la ecuación $x^2 + 3x = 130$ es −13, porque…

$$(-13)^2 + 3(-13) = 169 - 39 = 130.$$

BLOQUE 1

Secuencia 1 / lección 2

El número desconocido

CONTENIDO

Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

resolver

1. Reúnete con algunos compañeros para resolver los siguientes problemas. Planteen una ecuación para cada problema y anótenla en la columna de la derecha. Después inventen un problema similar a los aquí planteados y escríbanlo en el último renglón.

Problemas	Ecuaciones
Si al cuadrado de un número se le suma 11, se obtiene como resultado 92. ¿Qué número es?	$x^2 + 11 = 92$ $x_1 = 9$, $x_2 = -9$
Si al cuadrado de un número se le resta 15, se obtiene 106. ¿Qué número es?	$x^2 - 15 = 106$ $x_1 = 11$, $x_2 = -11$
Un número y su cuadrado suman 182. ¿De qué número se trata?	$x^2 + x = 182$ $x_1 = 13$, $x_2 = -14$
Si al cuadrado de un número se le resta el mismo número, se obtiene 210.	$x^2 - x = 210$ $x_1 = 15$, $x_2 = -14$
El cuadrado de un número y el doble del mismo suman 80. ¿Qué número es?	$x^2 + 2x = 80$ $x_1 = 8$, $x_2 = -10$
R. P.	

2. Complementen la tabla de la actividad 1 con lo siguiente.

a) Escriban la solución de cada ecuación y problema.

b) Averigüen en qué casos el simétrico de la solución que encontraron también resuelve la ecuación. En el primero y en el segundo casos.

c) En los casos en que el simétrico no solucione el problema, prueben con más números.

Ya sabemos...

El simétrico de 9 es –9; el simétrico de –5 es 5.

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y verifiquen que todos los problemas de la activad 1 tengan dos soluciones. Después lean la siguiente información y contrástenla con lo trabajado en las actividades 1 y 2; en particular, verifiquen qué problemas tienen dos números simétricos como solución.

En una ecuación de segundo grado como $x^2 = 25$, una solución es 5, porque $5^2 = 25$. Sin embargo, –5 también es una solución, porque $(-5)^2 = 25$. Esto significa que las ecuaciones de segundo grado **pueden tener dos soluciones.** En ciertos casos las soluciones son dos números simétricos.

3. Una manera de resolver ecuaciones de segundo grado consiste en buscar, por ensayo y error, números que satisfagan la ecuación. Así, por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 3x = 28$ se puede usar una tabla como la siguiente. R. T.

x	x^2	$3x$	$x^2 + 3x$
1	1	3	4
2	4	6	10
3	9	9	18
4	16	12	28
–2	4	–6	–2
–5	25	–15	10
–7	49	–21	28

a) En la tabla se aprecia que cuando x vale 1, $x^2 + 3x$ es igual a 4; cuando x vale 2, $x^2 + 3x$ es igual a 10. Prueben con otros valores de x hasta que $x^2 + 3x$ sea igual a 28.

b) Hay un número negativo que también satisface la ecuación $x^2 + 3x = 28$. Encuéntrenlo haciendo una tabla similar en su cuaderno.

c) La ecuación $x^2 + 3x = 28$ tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa. Anótenlas.

$x_1 = 4$ $x_2 = -7$

4. Encuentren las soluciones de cada ecuación. técnicas

a) $5x^2 = 45$
$x_1 = 3$
$x_2 = -3$

b) $4x^2 = 1$
$x_1 = \frac{1}{2}$
$x_2 = \frac{-1}{2}$

c) $x^2 + x = 56$
$x_1 = 7$
$x_2 = -8$

d) $x^2 - x - 56 = 0$
$x_1 = 8$
$x_2 = -7$

e) $x^2 - 13x = 0$
$x_1 = 0$
$x_2 = 13$

f) $x^2 + 9x = 0$
$x_1 = 0$
$x_2 = -9$

Convivimos

Cuando resuelvas una ecuación, verifica la respuesta. Si se cumple la igualdad, estarás seguro de que tu procedimiento y solución son correctos, lo cual te brindará confianza en los conocimientos que has adquirido. Cuando tengas dudas, pregunta a tu profesor.

Reflexionamos

Cuando se tiene una ecuación como $x^2 = 9$, ¿qué operación se aplica en ambos lados de la igualdad para simplificar y obtener la ecuación equivalente $x = 3$?

✷ Comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Noten que, en las ecuaciones de la actividad 4, hay dos cuyas soluciones son números simétricos. Identifíquenlas y comenten qué otra cosa tienen en común que las distingue del resto.

Secuencia 1 / lección 3

El camino de regreso

CONTENIDO

Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

resolver

1. **Trabaja en equipo. Analicen el siguiente problema y hagan en su cuaderno lo que se indica.**

Una caja contiene tantos paquetes como galletas hay en cada paquete; además hay 18 galletas sueltas, por lo que se obtiene un total de 643 galletas. ¿Cuántas galletas hay en cada paquete?

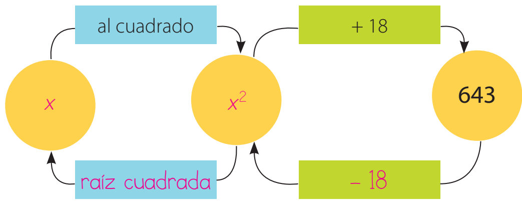
a) Subrayen la ecuación con la que se resuelve el problema.

$2x^2 - 18 = 643$ $2x^2 + 18 = 643$ $\underline{x^2 + 18 = 643}$ $x^2 - 18 = 643$

b) En la ecuación que subrayaron, ¿qué significados tiene la variable *x*, según el problema? ¿Por qué aparece elevada a la potencia 2? R. P.

c) Con base en la ecuación que subrayaron, escriban qué operaciones aplicarían al número *x* para obtener como resultado 643. Según el problema planteado, expliquen qué representa cada número y cada operación. R. P.

d) Una manera de obtener el valor de *x* consiste en partir del resultado y aplicar operaciones inversas. Completen el diagrama. Inicien en el recuadro de color verde que se encuentra vacío.



2. **Lean la siguiente información y hagan lo que se indica.**

Al igual que sucede con las ecuaciones lineales, una manera de hallar la solución de una ecuación de segundo grado es simplificarla mediante operaciones inversas, hasta que resulte evidente el valor de la incógnita. A este proceso se le llama **despejar la incógnita**. Por ejemplo:

$$x^2 + 13 = 49$$
$$x^2 + 13 - 13 = 49 - 13$$
$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

a) Resuelvan la ecuación de la actividad 1 utilizando el procedimiento descrito en el recuadro anterior. $x = \pm 25$

b) Relacionen este procedimiento con el diagrama presentado en el inciso d.

- **Con el resto del grupo, analicen sus respuestas de las actividades 1 y 2. En particular, corroboren que todos comprendan el procedimiento de las operaciones inversas.**

3. **Analiza el siguiente problema y haz en tu cuaderno lo que se indica.**
En un teatro, la cantidad de filas es el doble de la de butacas en cada fila. Además hay 50 localidades de balcón, lo que representa un total de 850 asientos. ¿Cuántas butacas hay en cada fila? ¿Cuántas filas tiene el auditorio?

a) Subraya la ecuación con la que se resuelve el problema.

$x^2 - 50 = 850$ $x^2 + 50 = 850$ $2x^2 - 50 = 850$ $2x^2 + 50 = 850$

b) En la ecuación que subrayaste, ¿qué significados tiene la variable x? ¿Por qué se eleva a la potencia 2? ¿Qué representa cada número y cada operación?
x es la cantidad de butacas en cada fila.

c) Halla el valor de x y verifica que cumpla las condiciones del problema.

¿Cuántas filas tiene el auditorio? 40 ¿Cuántas butacas hay en cada fila? 20

4. **Trabaja en equipo. Inventen un problema que pueda resolverse con la ecuación $x^2 + 7 = 151$. Resuélvanlo y verifiquen que la solución sea correcta.** R. P.

resolver

- **Con apoyo del profesor, analicen algunos de los problemas inventados; comprueben que cada uno se resuelva con la ecuación $x^2 + 7 = 151$ y que la solución cumpla las condiciones del problema.**

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones y contesta las preguntas en tu cuaderno.**

a) $x^2 = 36$ b) $a^2 = 12$ c) $x^2 - 8 = 28$ d) $n^2 = -144$
e) $-6m^2 = -150$ f) $m^2 + 7 = 88$ g) $n^2 - 5 = -4$ h) $8b^2 - 7 = 193$

» Una de las ecuaciones anteriores carece de solución. ¿Cuál es? Explica por qué.

a) $x = \pm 6$
b) $a = \pm\sqrt{12}$
c) $x = \pm 6$
d) No tiene solución.
e) $m = \pm 5$
f) $m = \pm 9$
g) $n = \pm 1$
h) $b = \pm 5$

6. **Trabaja en equipo. Seleccionen la ecuación que resuelve cada problema y encuentren su solución.**

técnicas

a) Siete losetas cuadradas cubren un piso de 448 cm². ¿Cuánto mide el lado de cada una?

$n^2 + 7 = 448$ $n^2 - 7 = 448$ $7n^2 = 448$ $n = 8$ $\frac{n^2}{7} = 448$

b) Uno más cuatro veces el cuadrado de un número es igual a 325. ¿Cuál es ese número?

$\frac{n^2}{4} + 1 = 325$ $4n^2 - 1 = 325$ $n^2 + 4 + 1 = 325$ $4n^2 + 1 = 325$ $n = 9$

- **Con ayuda del profesor, revisen los resultados de los problemas; si hubo errores, expliquen a qué se debieron y corrijan lo necesario. Comenten la siguiente información y contrástenla con lo que trabajaron en esta lección.**

Las ecuaciones de segundo grado de esta lección son de la forma $ax^2 + c = 0$ y, como posiblemente has notado, se pueden resolver con operaciones inversas hasta rescribirlas en la forma

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

En contexto

Conoce más sobre el álgebra a partir de contextos cotidianos en *El álgebra es divertida*, de la Biblioteca Escolar.

Lamm, Emma y Elena de Oteyza, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2009.

BLOQUE 1

Secuencia 2 / lección 4

¿Son iguales?

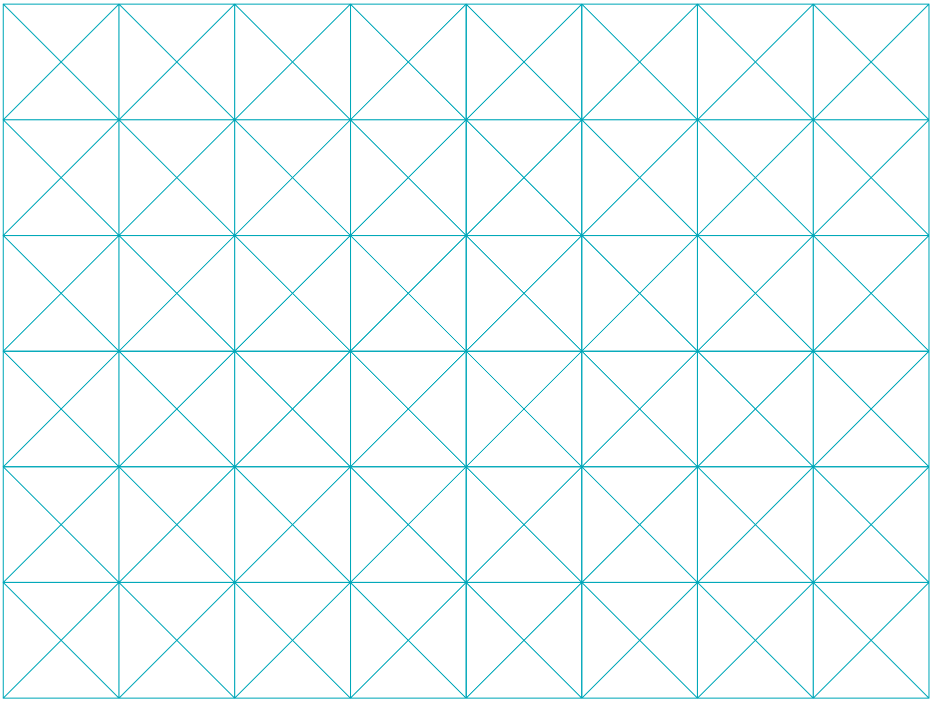
CONTENIDO
Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

¿Cuándo se dice que dos figuras son iguales? ¿Cuándo se dice que no son iguales pero sí semejantes? Éstas son algunas de las cuestiones que estudiarás en esta secuencia.

Ya sabemos...

En geometría, las figuras iguales también se llaman congruentes. Dos figuras son congruentes si, al poner una encima de la otra, coinciden.

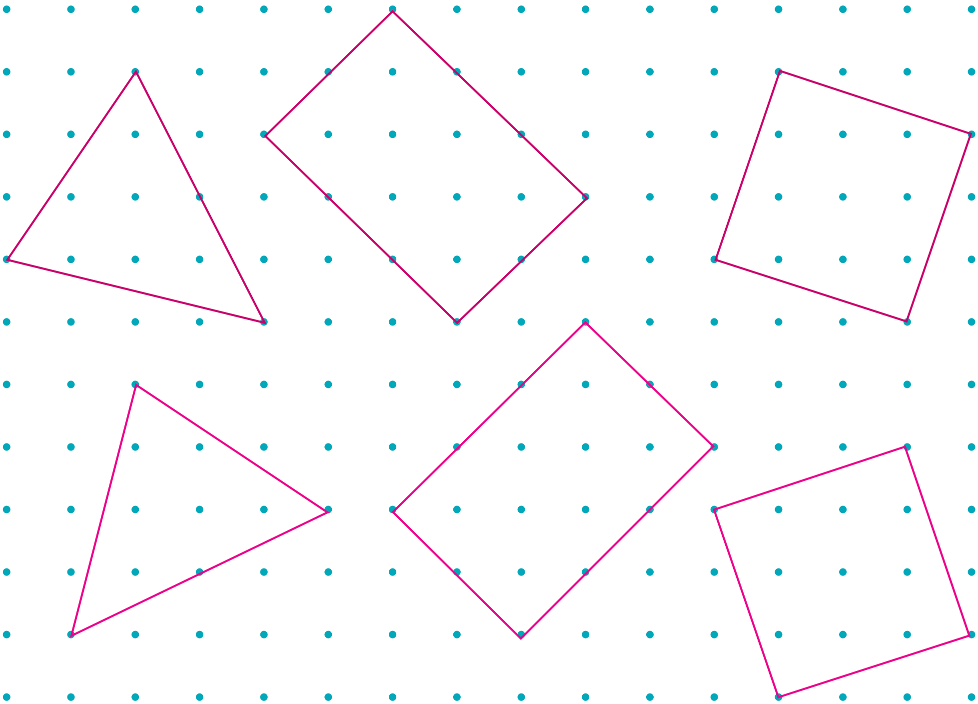
1. Efectúa la siguiente actividad.
   » Traza, en la retícula de abajo, dos parejas de polígonos congruentes. Debes marcar los lados de los polígonos sobre las líneas de la retícula.
   » Después reúnete en equipo con cuatro o cinco de tus compañeros. Muéstrales tus dos parejas de figuras para que, entre todos, evalúen si son o no congruentes.
   » Cada pareja de figuras congruentes valdrá 60 puntos, pero si otro alumno del equipo presenta el mismo tipo de figuras, los puntos se dividirán entre dos (30 puntos para cada alumno); si tres alumnos presentan el mismo tipo de figuras, los puntos se dividirán entre tres (20 puntos para cada uno); y así sucesivamente.
   » Si alguien del equipo afirma que dos figuras no son congruentes y el autor de estas no logra probar que sí lo son, esa pareja de figuras no valdrá ningún punto.
   » Al final, gana quien obtenga más puntos. R. P.



- Expliquen, en grupo y con ayuda de su profesor, cómo hicieron para verificar si dos figuras eran congruentes. Propongan un método para saber si dos polígonos son congruentes sin superponer las figuras y, de este modo, comprobar si coinciden. Es decir, digan qué características deben tener dos polígonos para ser congruentes. Anoten las conclusiones a las que lleguen.

Dos polígonos son congruentes cuando R. T. Dos polígonos son congrentes cuando todos sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales.

2. Traza, para cada figura de la retícula, otra figura congruente, pero dibújalas con una orientación diferente a la del ejemplo. R. T.



- Compara tus respuestas con las de tus compañeros; si no están de acuerdo en que dos figuras sean congruentes o no, encuentren alguna manera de probarlo. Luego redacten, entre todos, un procedimiento para trazar una figura congruente con otra, pero que tenga distinta orientación.

R. P.

Secuencia 2 / lección 5

El menor número de preguntas

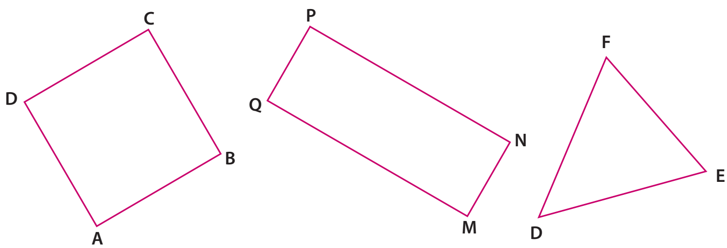
CONTENIDO
Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

comunicar

1. Organízate en equipos de tres o cuatro integrantes para jugar reproduce la figura.
   - Cada equipo necesitará un juego de geometría, una hoja blanca para trazar su figura, y media hoja para escribir preguntas al profesor.
   - Su profesor tendrá un cuadrilátero irregular **ABCD** que nadie podrá ver, sino hasta el final.
   - Cada equipo, por medio de las preguntas que escriba, solicitará al profesor la información que necesite para trazar un cuadrilátero congruente con el que él oculta. Solamente pueden hacer preguntas que se contesten con una medida, por ejemplo, 15 cm; o con sí o no.
   - El profesor devolverá a cada equipo su hoja, con las respuestas a sus preguntas.
   - Los equipos trazarán el cuadrilátero con la información recibida.
   - Cuando todos hayan trazado su cuadrilátero, cada equipo superpondrá el suyo sobre el del profesor para ver si coinciden.
   - Los equipos cuyos cuadriláteros coincidan tendrán un punto, y aquellos que lo hayan logrado con el menor número de preguntas ganarán un punto extra.

✱ Analicen, entre todos, las preguntas de los diferentes equipos. Respondan en su cuaderno lo siguiente. R. P.
   - ¿En qué fallaron las preguntas de quienes no lograron trazar un cuadrilátero congruente? ¿Les faltó información? ¿Cuál?
   - ¿Algunas de las preguntas de quienes sí lograron reproducir la figura fueron innecesarias? Es decir, ¿se podrían eliminar sin afectar el resultado?

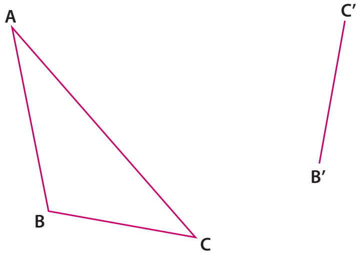
2. Traza, en tu cuaderno y con ayuda de tu juego de geometría, una figura congruente con cada una de las siguientes. Puedes dibujarlas en una posición diferente. Rotula cada vértice haciendo una correspondencia con las letras abajo señaladas; por ejemplo, **A'**, **B'**, **C'**, **D'**, etcétera.



3. Traza nuevamente las tres figuras anteriores, pero usa únicamente tu regla no graduada y el compás.

4. Señala, con ayuda de la regla no graduada y el compás, dónde debe ubicarse el punto **A'** para que los triángulos **A'B'C'** y **ABC** sean congruentes.

R. T. Con el compás tazar en C' una circunferencia de adio AC y, en B', una circunferencia de radio AB. El punto A' se coloca en una de las intesecciones.



- Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, cómo trazaste las figuras de la actividad 3 usando solamente regla no graduada y compás. Comenten también cómo ubicaron el punto **A'** de la actividad 4. Anoten en su cuaderno sus conclusiones.

5. Efectúa, en equipos, la siguiente actividad.
Cada integrante del equipo trazará en su cuaderno los polígonos que se indican en la tabla. Antes de hacerlo acuerden, para cada caso, si todos los equipos deberán trazar figuras congruentes o si algunas pueden ser diferentes. Anoten en la tabla su resolución.

Polígono que debe trazarse	¿Será congruente con el de los demás equipos?
Un cuadrado con un lado de 3 cm	Sí.
Un cuadrado cuya diagonal mida 6 cm	Sí.
Un rectángulo con un lado de 4 cm	No.
Un rectángulo cuyo largo mida el doble que el ancho	No.
Un rectángulo cuyos lados midan 3 cm y 7 cm	Sí.
Un triángulo con dos ángulos de 70º, cuyo lado corto mida 3 cm	Sí.
Un triángulo cuyos ángulos midan 90º, 60º y 30º	No.
Un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 7 cm	Sí.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten en grupo lo siguiente.

¿Qué datos se necesitan para trazar un triángulo congruente con otro?

R. T. Dos ángulos y un lado entre ellos, los tres lados.

¿Y en el caso de un rectángulo?

R. T. Se requiere la medida de los dos lados.

¿Y para un cuadrado?

R. T. Se necesita la medida de la diagonal o la medida de un lado.

Secuencia 2 / lección 6

La razón de semejanza

CONTENIDO

Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

Ya sabemos...

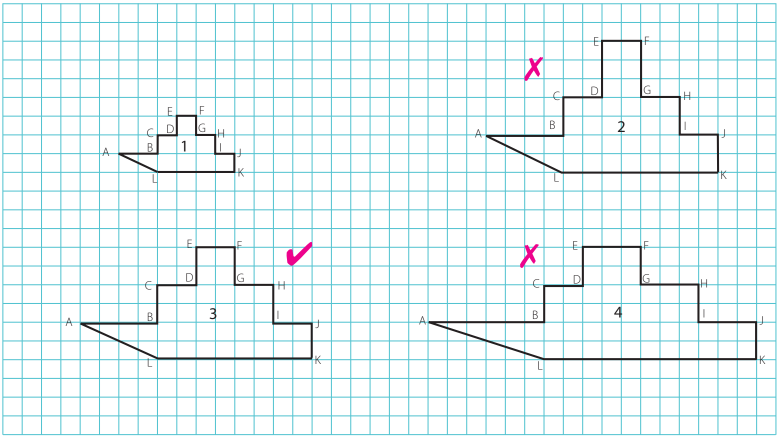
Decir que las medidas de los lados son proporcionales significa que…

- si en una figura un lado **a** es igual a un lado **b**, en la otra figura ocurre lo mismo;
- si en una figura un lado a es dos, tres o *n* veces mayor que el lado b, en la otra figura, el lado correspondiente a **a** será ese mismo número de veces mayor que el correspondiente a **b.**

También significa que existe un número, siempre el mismo, que, multiplicado por la medida de los lados de una de las figuras, arroja las medidas de los lados de la otra.

Ese número se llama **constante de proporcionalidad, factor de escala** o **razón de semejanza.**

1. Anota una ✔ al lado de los barcos que son semejantes al 1 y un ✘ al lado de los que no.



2. Contesta las preguntas.

a) En el barco 1, **EFGD** es un cuadrado. ¿En qué barcos no sucede esto? 2 y 4

b) ¿En qué barcos el ángulo **A** no es igual al del barco 1? 4

c) De acuerdo con lo anterior, ¿qué figuras no son semejantes a la 1? 4

d) De acuerdo con lo anterior, ¿qué características tienen los ángulos y los lados de dos figuras semejantes? Anota tu conclusión.

R. P.

✹ Compara, en grupo, la manera en que cada quien describió las figuras semejantes. Después lean y comenten la siguiente información.



Cuando dos figuras son semejantes, los ángulos de una son **iguales** a los de la otra, y los lados de una son **proporcionales** a los lados de la otra.

e) ¿Cuál es el único barco semejante al 1? 3 ¿Qué factor de escala debe multiplicarse por las medidas del barco 1 para obtener las del barco semejante? 2

3. **Lleva a cabo lo siguiente.** comunicar

a) Traza en tu cuaderno un rectángulo **A**, en el que el largo sea el triple del ancho.

b) Un rectángulo **B** está a escala 2 a 1 respecto al rectángulo **A**, es decir, sus lados tienen el doble de tamaño. Subraya, sin trazar dicho rectángulo, la oración correcta.

En el rectángulo **B**…

» el largo es seis veces el ancho.
» el largo es tres veces el ancho.
» el largo es dos veces el ancho.

c) Traza el rectángulo **B** y verifica tu respuesta. validar

d) Traza en tu cuaderno un rectángulo **C** semejante al rectángulo **A**, pero con un factor de escala 4 a 1. ¿Qué relación tienen el largo y el ancho del rectángulo **C**?

El largo es el triple del ancho.

e) ¿Son semejantes **C** y **B**? Argumenta tu respuesta en tu cuaderno. Sí lo son.

Reflexionamos

Un cuadrado A mide 4 cm de lado y un cuadrado A', 8.3 cm de lado. ¿A y A' son semejantes?

Reflexionamos

¿Todos los rombos que tienen un ángulo de 30° son semejantes?

4. **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después lean lo siguiente.**

La relación del doble que guardan los lados del rectángulo **B** con los del rectángulo **A** es una **razón de semejanza**. También lo es la relación 4 a 1 (del cuádruple) que guardan los lados del rectángulo **C** respecto a los del rectángulo **A**.

Por otra parte, en los tres rectángulos semejantes **A**, **B** y **C** el largo es tres veces el ancho. Esta razón existente entre dos partes de un mismo rectángulo se conserva en los demás rectángulos semejantes; no tiene un nombre especial.

5. **Investiga las medidas reales de una cancha de futbol o de basquetbol y traza en tu cuaderno una semejante. Elige la razón de semejanza que más te convenga.**

a) ¿Cuánto mide el largo real de la cancha? Futbol: entre 90 m y 120 m. Basquetbol: 28 m.

b) ¿Y el ancho? Futbol: entre 45 m y 90 m. Basquetbol: 15 m.

c) ¿Qué razón de semejanza elegiste? R. P.

d) ¿Cuáles son las dimensiones de tu dibujo? R. P.

✹ **Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 3, 4 y 5 con las de tus compañeros.**

BLOQUE 1

Secuencia 2 / lección 7

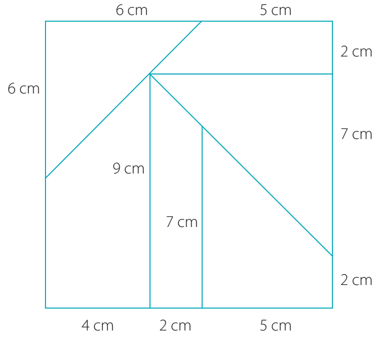
Rompecabezas

CONTENIDO

Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

resolver

1. Reúnete con dos o tres compañeros. Dibujen, en un pedazo de cartoncillo, un rompecabezas como el que aparece a continuación, con las medidas que se indican. Recorten las piezas y repártanselas.[1]



Cada uno amplíe, a una misma escala, las piezas que le corresponden, de manera que al reunirlas se forme un rompecabezas semejante al de la imagen, es decir, con la misma forma que el original pero más grande. Antes de fabricar las piezas, acuerden cómo lo harán.
El segmento que en el rompecabezas original mide 4 cm deberá medir 5 cm en la ampliación.

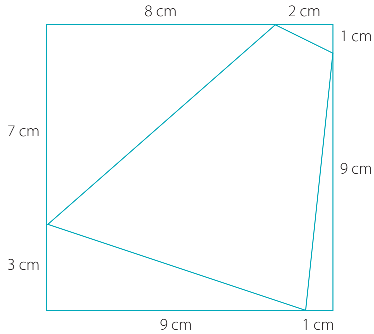
- Armen el rompecabezas. Si las piezas no embonan, busquen, en grupo, el origen del error.

Una pista

Dado que los lados correspondientes de figuras semejantes son proporcionales, debe haber un número que, al multiplicarse por las medidas de una de las figuras arroje las medidas de la otra.
A veces, encontrarlo es difícil. Por ejemplo, para encontrar qué número multiplicado por 5 da 8 se puede…
- si a 5 le corresponde 8, averiguar cuánto le corresponde a 1;
- averiguar qué fracción de 5 da 8 o, dicho en otras palabras, qué fracción multiplicada por 5 da 8;
- dividir 8 entre 5.

2. Elaboren una segunda copia del rompecabezas anterior. El lado que mide 5 cm en el original deberá medir ahora 8 cm en la copia. Comprueben que las piezas embonen.

3. Construyan el rompecabezas que se muestra a la derecha, recorten las piezas y repártanselas al azar. Hagan una ampliación a escala: el lado que mide 2 cm debe medir 4 cm en la ampliación.



- Armen el rompecabezas. Si las piezas no embonan, busquen, en grupo, el origen del error.

4. Analicen la siguiente afirmación.

Los rombos, como los cuadrados, tienen cuatro lados iguales. Por tanto, cualquier rombo es semejante a otro.

a) Si consideras que la afirmación es falsa, da un ejemplo que la contradiga. Si consideras que es verdadera, explica por qué. R. T. Es falsa. Dos rombos que tengan sus lados de 4 cm, pero que sus ángulos correspondientes sean distintos.

b) Escribe qué condiciones deben cumplir dos rombos para ser semejantes.

R. T. Que sus ángulos interiores sean iguales o que las diagonales guarden la misma proporción.

[1] Tomado de Brousseau, G., "Problèmes de didactique des décimaux" en *Recherches en Didactique des Mathématiques,* París, La Pensée Sauvage, núm. 2, vol. 3, 1981, pp. 37-127.

5. Escribe V, de verdadero, o F, de falso, según corresponda. Dibuja en tu cuaderno dos figuras para demostrar que una oración es falsa, o argumenta su veracidad en caso de que sea cierta. validar

Oración 1. Si dos figuras son congruentes, también son semejantes. V

Oración 2. Si dos figuras son semejantes, también son congruentes. F

Argumentación de la veracidad de una oración.

R. T. Si dos figuras son congruentes, sus lados correspondientes son iguales y sus ángulos correspondientes también. Entonces son semejantes con razón de semejanza igual a 1.

6. Anota si cada afirmación es verdadera o falsa; no olvides argumentar tus respuestas. En el caso de las falsas, traza en tu cuaderno un par de figuras que lo demuestren. comunicar

a) Todos los rectángulos son semejantes.

Falso

b) Todos los rectángulos cuyo ancho mide la cuarta parte del largo son semejantes.

Verdadero. R. T. Los ángulos son iguales y los lados guardan la misma proporción.

c) Todos los cuadrados son semejantes.

Verdadero. R. T. Ángulos iguales y los lados correspondientes proporcionales.

d) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

Falso.

e) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Verdadero. R. T. Ángulos iguales y lados correspondientes proporcionales.

f) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

Falso.

✹ Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 4, 5 y 6 con las de tus compañeros. Resuman, entre todos, las características que deben tener dos figuras para ser semejantes.

Convivimos

Fíjate en que algunas palabras, como *congruente* o *semejante*, cobran diferente sentido en matemáticas. Organiza con tu grupo una lluvia de ideas para identificar otras palabras cuyo significado en el lenguaje cotidiano difiera del matemático.

conect@mos

Aprende más sobre figuras semejantes en

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/semejanza_triangulos_macb/index.htm

Trabaja con un compañero. Lean la información presentada y resuelvan los ejercicios propuestos. Al finalizar, comparen y validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

Secuencia 3 / lección 8

Figuras congruentes

CONTENIDO

Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

¿Cuál es la información mínima que debe proporcionarse a una persona acerca de un triángulo para que trace otro congruente? ¿Qué información hay que dar si solamente se quiere que sean semejantes? Estudiarás estas cuestiones durante la secuencia.

comunicar

1. Reúnete con dos o tres compañeros para jugar reproduce el triángulo. Las reglas son iguales que las del juego reproduce la figura, expuesto en la lección 5 de la secuencia anterior; la única diferencia es que ahora su profesor tendrá un triángulo irregular **ABC**.

- Analicen, con el grupo, las preguntas que formularon durante el juego. R. P.

a) ¿En qué fallaron las preguntas de quienes no lograron trazar un triángulo congruente? ¿Qué información les faltó?

b) De las preguntas que sí funcionaron, ¿algunas solicitaban menos información que otras? Si es así, escriban en su cuaderno dos de las preguntas más breves que sí funcionaron.

2. Repitan la actividad anterior de la siguiente manera.

- Organícense en parejas.
- Cada pareja tendrá una pareja asociada, es decir, ambas parejas formarán parte del mismo equipo. Las parejas asociadas deberán sentarse lo más lejos posible entre sí.
- El profesor entregará a cada pareja un triángulo trazado en una hoja de papel.
- Cada pareja mandará un mensaje escrito, sin dibujos, a su pareja asociada, con la información necesaria para trazar un triángulo congruente con el suyo.
- Los mensajes deben ser lo más breve posible, es decir, no deben incluir información innecesaria o redundante.
- Al recibir el mensaje de su pareja asociada, cada pareja trazará el triángulo correspondiente en una hoja de papel.
- Al terminar, cada equipo superpondrá sus figuras para compararlas. Por cada par de figuras que sean congruentes, el equipo obtendrá un punto. Además, los tres mensajes más breves que hayan funcionado valdrán, cada uno, un punto para el equipo que los escribió.

- Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.

a) Analicen todos los mensajes, asignen los puntos correspondientes y determinen a los equipos ganadores.

b) Escriban en su cuaderno los tres mensajes más breves que hayan funcionado.

c) Propongan y acuerden cuál es la información mínima que hay que dar en un mensaje para trazar un triángulo congruente con otro. Discutan más de una posibilidad.

d) Pongan a prueba sus propuestas; analicen, en cada una, si pueden construir dos triángulos que cumplan las condiciones planteadas, pero que no sean congruentes.

3. **Forma un equipo de tres o cuatro integrantes. Efectúen lo siguiente en su cuaderno.**

resolver

a) A la derecha hay seis conjuntos de dos o tres medidas de triángulos. Analicen cada conjunto de datos y prevean, sin hacer trazos, si con los datos se pueden construir triángulos diferentes o si sólo se pueden trazar congruentes. Si se pueden dibujar diferentes, indíquenlo junto al conjunto. Hagan lo mismo en todos los casos; consideren los lados y ángulos como se muestra a continuación.

*Lado **AB** = 6 cm* ✔
*Ángulo **A** = 43°*
*Ángulo **C** = 89°*

*Lado **AB** = 5 cm* ✔
*Lado **BC** = 6 cm*
*Lado **AC** = 7 cm*

*Lado **AB** = 11 cm* ✗
*Lado **BC** = 10 cm*
*Ángulo **A** = 60°*

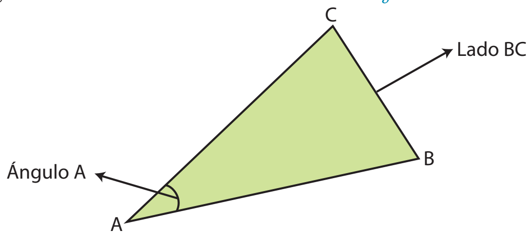
*Lado **AB** = 4cm* ✗
*Ángulo **A** = 65°*

*Lado **AB** = 4 cm* ✔
*Lado **AC**= 6 cm*
*Ángulo **A** = 48°*

*Ángulo **A** = 56°* ✗
*Ángulo **B** = 75°*
*Ángulo **C** = 49°*

Ya sabemos...

Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.



b) Elijan un conjunto de datos para que cada integrante construya un triángulo con las medidas indicadas. Procuren que los triángulos sean distintos.

c) Comparen sus triángulos y verifiquen si acertaron en su previsión: con el conjunto de datos, ¿se obtienen triángulos diferentes o congruentes? Si no acertaron, expliquen por qué.

d) Elijan otro conjunto de datos y repitan el proceso.

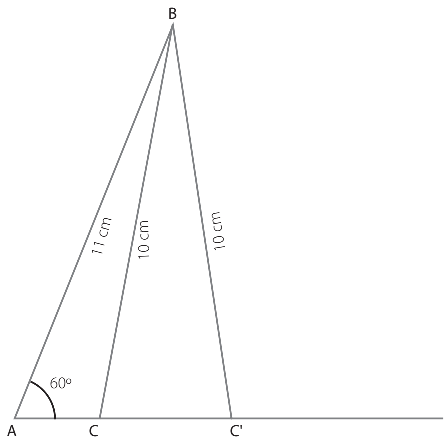
e) Anoten una ✔ junto a los conjuntos que contengan información suficiente para trazar triángulos congruentes y un ✗ a los que les falten datos.

✷ **Hagan, con ayuda del profesor, lo que se indica a continuación.**

a) Vean si todos los equipos pusieron ✗ o ✔ en los mismos grupos. Si hay diferencias, averigüen quién tiene razón.

b) En la figura de la derecha se han trazado dos triángulos diferentes (**ABC** y **ABC'**), con las medidas de uno de los conjuntos de datos anteriores. Identifiquen de qué conjunto se trata y comenten si habían previsto que se podrían trazar triángulos diferentes.

c) Anoten la información que faltaría en los conjuntos donde pusieron ✗ para que los triángulos trazados fueran congruentes.



sm

BLOQUE 1

Secuencia 3 / lección 9

Condiciones necesarias y suficientes

CONTENIDO

Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

1. En la lección anterior propusieron la información mínima que debe darse para trazar un triángulo congruente con otro. Posiblemente advirtieron que hay varias posibilidades para hacerlo.

Estos conjuntos mínimos de datos se llaman **criterios de congruencia de triángulos.** Un ejemplo de criterio de congruencia es el siguiente.

- Si dos ángulos de un triángulo y el lado común a ambos son iguales, respectivamente, a dos ángulos y al lado común a ambos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes entre sí.

Convivimos

Reflexiona con tus compañeros acerca del nombre de la lección: ¿qué quiere decir que una condición sea necesaria y suficiente? Noten que se requiere usar este lenguaje para precisar ideas en un diálogo matemático.

a) Observen que el criterio anterior requiere que los triángulos tengan tres elementos iguales: dos ángulos y el lado común a ambos. Por eso se denomina criterio *ALA*.

b) En total hay tres criterios de congruencia, con tres datos cada uno. Identifíquenlos y, si no lo han hecho aún, anótenlos en su cuaderno. Propongan una manera de nombrar cada uno.

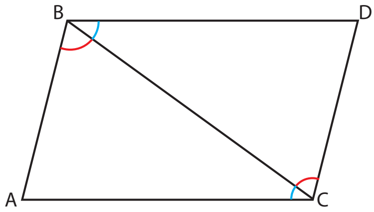
Comenten, en grupo y con ayuda del profesor, los criterios que ustedes encontraron. Noten que no hay criterios de congruencia que requieran únicamente dos medidas iguales. Después lean los criterios del siguiente recuadro y comenten si corresponden con los que ustedes anotaron.

Para asegurar que dos triángulos son congruentes, es suficiente que se cumpla cualquiera de los siguientes criterios de congruencia.

- Que tengan tres lados iguales (criterio *LLL*).
- Que tengan dos lados y el ángulo que estos forman iguales (criterio *LAL*).
- Que tengan dos ángulos y el lado común a ambos iguales (criterio *ALA*).

2. Trabaja con un compañero. A continuación se describen las características de algunas parejas de triángulos y se pregunta si estos pueden ser diferentes o siempre deben ser congruentes. Si consideran que pueden ser diferentes, tracen un ejemplo en su cuaderno; si piensan que siempre han de ser congruentes, usen algún criterio de congruencia para justificar su afirmación, como se hace en el ejemplo siguiente.

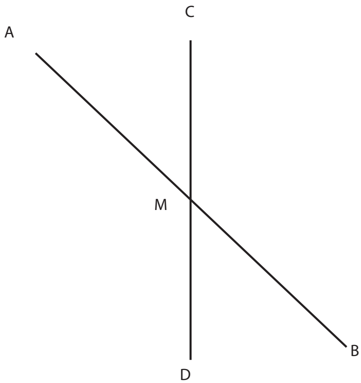
a) ¿Pueden ser diferentes los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal en un paralelogramo?
No; como se muestra en la siguiente figura, los triángulos son congruentes. Dado que ABCD es un paralelogramo, $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{BD}$. Entonces…
   » el ángulo ABC es congruente con el ángulo BCD (marcados en rojo) por ser *alternos internos* en un sistema de paralelas cortadas por una secante;
   » el ángulo CBD es congruente con el ángulo BCA (marcados en azul) por la misma razón;
   » los dos triángulos comparten el lado BC.



b) Si dos triángulos isósceles tienen la misma base, ¿necesariamente son congruentes?
No necesariamente.

c) ¿Pueden ser diferentes los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal en un cuadrilátero cualquiera?
Sí pueden ser distintos.

d) Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en el punto medio **M** de ambos, como se muestra en la figura de la derecha, ¿los triángulos **ACM** y **MDB** pueden ser diferentes?
Son congruentes (criterio LLL o LAL).



e) Si dos triángulos equiláteros tienen un lado igual, ¿son necesariamente congruentes?
Sí son congruentes, criterio ALA.

f) Si dos triángulos tienen bases y alturas iguales, ¿pueden ser diferentes?
Sí pueden ser diferentes.

g) ¿Pueden ser diferentes dos triángulos con tres ángulos iguales?
Sí pueden ser diferentes.

3. **Trabaja con un compañero que esté sentado lejos de ti. Cada uno necesitará un juego de geometría (regla, transportador y compás), una hoja blanca y media hoja.**

a) Cada uno trace un rombo en la hoja blanca, sin que el otro lo vea. comunicar

b) Anoten en la media hoja un mensaje dirigido a su pareja con la información necesaria para que trace un rombo congruente con el suyo. No pueden agregar dibujos.

c) Intercambien los mensajes y tracen los rombos.

d) Comparen sus rombos. Si no coinciden, analicen qué falló.

conect@mos

Descarga la actividad de triángulos semejantes en
www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia
Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

✹ **Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.**

a) Vean qué mensajes no funcionaron y analicen por qué.

b) Comenten, respecto a los mensajes que sí funcionaron, en cuáles hay la mínima información necesaria y en cuáles hay información innecesaria o redundante.

c) Tracen las diagonales de su rombo y adviertan que en su interior se forman cuatro triángulos. Expliquen por qué basta proporcionar los datos de uno solo de los triángulos para trazar un rombo congruente.

Una pista

Usa los criterios de congruencia para demostrar que los cuatro triángulos que se forman al interior del rombo son congruentes.

¿Son semejantes?

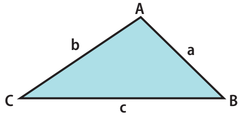
CONTENIDO
Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Ya sabemos...

Dos figuras semejantes tienen la misma forma, pero el tamaño puede ser igual o diferente.

Si dos triángulos son semejantes, los ángulos de uno son congruentes con los del otro y los lados de ambos, proporcionales entre sí.

1. Trabaja con un compañero. En la tabla están todas las medidas del triángulo 1 y algunas medidas de otros triángulos. Considerando esos datos, tracen un triángulo que no sea semejante al 1. Anoten, en la última columna, Sí o No para indicar si fue posible trazar un triángulo no semejante. Cuando sea posible hacerlo, anoten las medidas que faltan en la tabla.



Triángulo	Lado (cm)			Ángulo (grados)			¿Fue posible construir un triángulo no semejante al triángulo 1?
	a	b	c	∠ A	∠ B	∠ C	
1	4	5	7	101	45	34	
2				101			Sí.
3				101	45	34	No.
4	8	10					Sí.
5	8	10	14	101	45	34	No.
6	8			101			Sí.
7	8	10	14	101	45	34	No.
8	8	10	2.5	10	136	34	Sí.

Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo que se pide a continuación.

a) Verifiquen si están de acuerdo en qué casos no es posible trazar triángulos NO semejantes. Si hay desacuerdos, analicen quién tiene razón.

b) Comenten qué datos se necesitan, como mínimo, para asegurar que un triángulo sea semejante a otro dado. Noten que hay varias respuestas posibles; cada una constituye un criterio de semejanza de triángulos.

c) Prueben los criterios de semejanza que hayan encontrado; para cada uno, intenten hacer triángulos que cumplan el criterio, pero que NO sean semejantes.

d) Finalmente, comparen sus criterios de semejanza con los del siguiente recuadro. Si alguno es nuevo (no lo encontraron ustedes), pónganlo a prueba como lo hicieron en el inciso c). Ahora bien, si encontraron alguno que no está en el recuadro, significa que este contiene información que se puede quitar, es decir, no es un criterio mínimo, o tiene algún error. Si éste es el caso, busquen el error y corríjanlo.

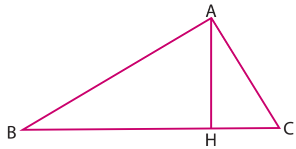
Para que dos triángulos sean semejantes basta que se cumpla cualquiera de los siguientes criterios.
- Que los tres lados de uno sean proporcionales a los tres del otro.
- Que dos ángulos de uno sean iguales a dos ángulos del otro.
- Que dos lados de uno sean proporcionales a dos lados del otro, y el ángulo comprendido entre estos lados sea igual.

Estas tres condiciones se llaman **criterios de semejanza de triángulos**.

2. Argumenta en tu cuaderno por qué las siguientes parejas de triángulos son semejantes. Aprovecha la información que se da, la que no se proporciona, pero se puede deducir, y algún criterio de semejanza. En el inciso a) hay un ejemplo.

comunicar

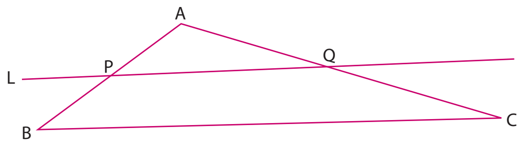
a) **AH** es la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo rectángulo **ABC**.



» El triángulo **ABH** es semejante al triángulo **ABC** porque…
– los dos triángulos comparten el ángulo **ABH**;
– ambos tienen un ángulo recto;
– los triángulos tienen dos ángulos iguales, por lo que se cumple el criterio que afirma que si dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro, los triángulos son semejantes.

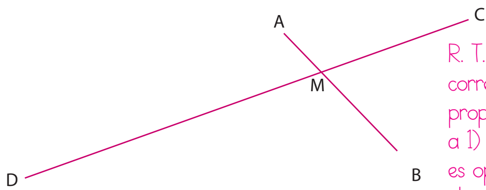
» El triángulo **AHC** es semejante al triángulo **ABC** porque… Las razones son similares a las del ejemplo.
» El triángulo **ABH** es semejante al triángulo **AHC** porque… R. T. Ambos triángulos son semejantes al triángulo ABC.

b) La recta **L** es paralela al lado **BC** del triángulo **ABC**, y corta los lados **AB** y **AC** en los puntos **P** y **Q**, respectivamente.



» El triángulo **APQ** es semejante al triángulo **ABC** porque… R. T. Las rectas forman un sistema de rectas paralelas. Por ello los triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales y comparten el tercero.

c) Los segmentos **AB** y **CD** se cortan en el punto **M**. Los segmentos **MB** y **MD** miden el doble que **AM** y **CM**, respectivamente.



» Los triángulos **ACM** y **BDM** son semejantes porque… R. T. Tienen dos lados correspondientes proporcionales (razón 2 a 1) y el ángulo DMB es opuesto por el vértice al ángulo AMC, por lo que son iguales.

✹ Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. Revisen en cada caso qué criterio de semejanza aplicaron y si la información que usaron se desprende de los datos del problema. Hagan en su cuaderno una síntesis acerca de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos; ilustren cada caso con una pareja de triángulos trazados con regla y compás.

Una pista

Recuerda cómo son los ángulos que se forman en un sistema de paralelas cortadas por una secante.

conect@mos

Refuerza tus conocimientos sobre congruencia de triángulos en

portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/semejanzatriangulos/page/0/2

Lee la información que se presenta y resuelve las actividades propuestas. Al finalizar, compara y valida tus respuestas con algún compañero. Después comenten las dificultades que hallaron durante el proceso.

BLOQUE 1

Secuencia 4 / lección 11

Tablas de valores y gráficas

CONTENIDO

Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Las gráficas, tablas y expresiones algebraicas sirven para estudiar las relaciones entre dos conjuntos de cantidades. En esta secuencia aprenderás a analizar relaciones entre dos conjuntos de cantidades a partir de algunas características de su gráfica.

Ya sabemos...

Dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales si al aumentar una de ellas al doble, triple…, su correspondiente cantidad aumenta el doble, triple… Lo mismo sucede si una cantidad disminuye a la mitad, a una tercera parte, etcétera.

1. Analiza la información y anota qué tabla de valores corresponde a cada situación.

» El peso de un perro desde su nacimiento hasta que cumple tres meses: Tabla 1.

» La cantidad de paletas de caramelo y su costo: Tabla 2.

» Las edades de dos hermanos si uno es dos años mayor que el otro: Tabla 3.

Tabla 1	
$y = 2x + 1$	
x	y
0	1
1	3
2	5
3	7

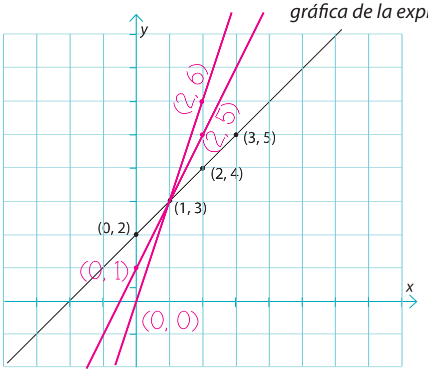
Tabla 2	
$y = 3x$	
x	y
0	0
1	3
2	6
3	9

Tabla 3	
$y = x + 2$	
x	y
0	2
1	3
2	4
3	5

a) Escribe en las tablas 1 y 2 las expresiones algebraicas correspondientes.

b) ¿En qué tabla las cantidades (x, y) cambian de manera proporcional? Tabla 2.

2. En el plano cartesiano se representaron los pares de coordenadas en la tabla 3 y se unieron mediante una linea. El trazo que se obtuvo como resultado es llamado *gráfica de la expresión algebraica* $y = x + 2$.



a) Haz lo mismo con los pares de coordenadas de las tablas 1 y 2. Traza las rectas con colores diferentes.

b) Una de las tres rectas trazadas pasa por el origen. ¿A qué tabla corresponde dicha recta? A la 2.

c) Explica en tu cuaderno las características que, según tú, debe tener la gráfica de una relación de proporcionalidad directa.

3. **Haz lo siguiente usando la expresión algebraica $y = 2x - 5$.**

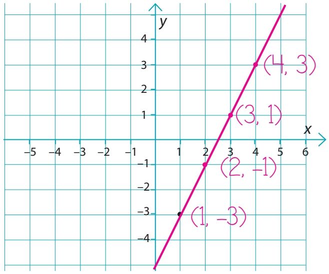
a) Completa la tabla 4. Dale diversos valores a x y efectúa las operaciones correspondientes para obtener los de y. Por ejemplo, si x vale 1, $y = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$.

b) Representa en el plano cartesiano algunos pares de coordenadas y traza la gráfica de la expresión algebraica.

Tabla 4

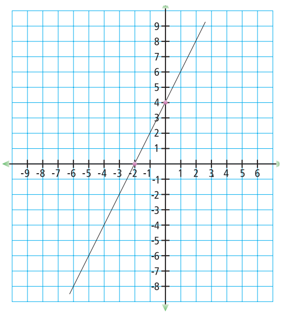
$y = 2x - 5$

x	y
1	−3
2	−1
3	1
4	3



» La relación anterior no es de proporcionalidad directa. Da al menos un ejemplo de ello.
R. T. No pasa por el origen. Al doble de 1 no le toca el doble de −3.

4. **Elabora, con base en la gráfica, la tabla de valores y encuentra la expresión algebraica.**



R. T.

x	y
−2	0
−1	2
0	4
1	6
2	8
3	10

a) Subraya la expresión algebraica que corresponde a la gráfica.

$y = -2x + 4$ $y = 2x - 4$ <u>$y = 2x + 4$</u> $y = -2x - 4$

b) ¿Por qué la gráfica no corresponde a una relación de proporcionalidad directa?

R. T. Porque no pasa por el origen (0,0).

5. **Reúnete con dos compañeros y hagan lo siguiente en su cuaderno.**

a) Elaboren tablas de valores con las siguientes expresiones algebraicas y grafíquenlas.

$y = \frac{x}{2}$ $y = \frac{x}{2} + 1$ $y = \frac{x}{2} - 1$ $y = 3x$ $y = 3x + 4$ $y = 3x - 2$

b) ¿Cuál es la ordenada al origen de cada recta? 0, 1, −1, 0, 4, −2

c) ¿Qué expresiones algebraicas dan como resultado una gráfica asociada a una relación de proporcionalidad directa? R. T. Las de la forma $y = mx$

d) En las expresiones algebraicas que corresponden a relaciones de proporcionalidad directa, ¿cuál es el valor de la ordenada al origen? 0

Una pista

La ordenada al origen tiene dos interpretaciones.
Geométrica. Es la ordenada del punto donde la grafica de la recta interseca el eje *y*.
Algebraica. Es el valor de *y* cuando *x* vale 0.

Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Comenten la relación entre la ordenada al origen y la expresión algebraica.

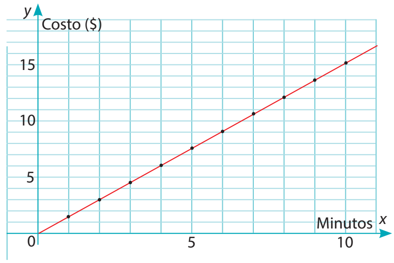
Tarifas telefónicas

CONTENIDO Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

1. Trabaja en equipo. Las siguientes gráficas muestran las tarifas de una compañía que ofrece diferentes servicios. Respondan las preguntas con ayuda de esa información.

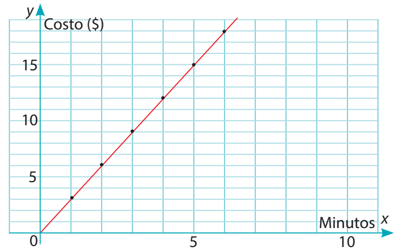
Gráfica 1

Costo por minuto de una llamada de un celular a otro



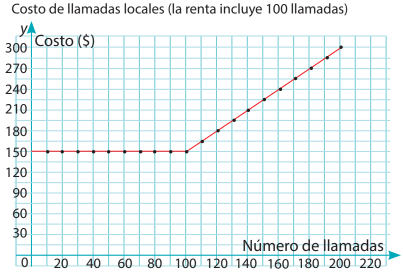
Gráfica 2

Costo por minuto de una llamada de casa a celular



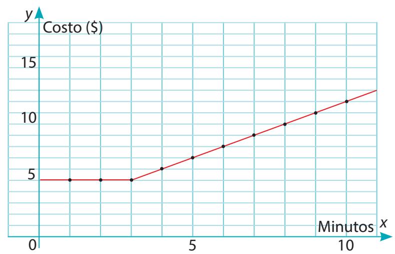
Gráfica 3

Costo de llamadas locales (la renta incluye 100 llamadas)



Gráfica 4

Costo por minuto de una llamada de teléfono público a casa



a) ¿En qué gráfica se muestra una tarifa en que el costo por llamada no depende de los minutos que ésta dure? En la 3.

b) De las gráficas en que el costo depende de la duración de la llamada, ¿en cuál cuesta lo mismo una llamada de 1 min que una de 3 min? En la 4.

c) Explica por qué las cantidades (costo y llamadas) de la gráfica 3 no son directamente proporcionales. R. T. Porque la gráfica está formada por dos segmentos de recta que no pasan por el origen.

d) ¿En qué gráfica se indica que se debe pagar aunque no se hagan llamadas? En la 3.

- Comparen sus respuestas y determinen en qué gráfica se paga menos por una llamada de 10 minutos.

En contexto

Una consulta hecha en 2004 indicó que en México había poco más de 34 millones de teléfonos celulares. Es decir, prácticamente uno de cada tres mexicanos contaba en ese año con un sistema de comunicación de este tipo. El porcentaje fue mucho mayor en los hombres (43%) que en las mujeres (29%), y decrecía en los adultos mayores y en las áreas rurales del país, donde sólo 18% declaró contar con este servicio.

2. Completa las tablas con los datos proporcionados en las gráficas anteriores.

técnicas

Celular a celular		Teléfono de casa a celular		Llamadas locales		Teléfono público a casa	
Minutos	Costo	Minutos	Costo	Llamadas	Costo	Minutos	Costo
1	1.5	1	3	10	150	1	5
2	3	5	15	20	150	2	5
4	6	8	24	R. T. 100	150	4	6
10	15	10	30	110	165	8	10
$y = 1.5x$		$y = 3x$		Gráfica 3		Gráfica 4	

3. Contesta las preguntas en tu cuaderno y haz lo que se pide. R. T. La gáfica correspondiente no pasa por el origen.

a) En la tarifa de llamadas de teléfono público a casa, la cantidad que se paga por usar el teléfono no es proporcional al número de llamadas. Da un argumento para afirmarlo.

b) ¿En cuáles de las relaciones anteriores el costo de la llamada es proporcional a su duración? ¿Cómo lo sabes? R. T. Al doble de llamadas, no le corresponde el doble de precio.

c) Considera las dos relaciones de proporcionalidad. Representa con x el número de minutos y con y, el costo. Anota en la parte inferior de cada tabla su expresión algebraica.

Reflexionamos

En las tablas con cantidades directamente proporcionales, hay un número por el que se multiplican las cantidades de una columna para obtener su correspondiente en la otra.

✷ Haz, en grupo y con ayuda del profesor, lo que se pide.

a) La representación de la gráfica 3 está formada por dos partes, una recta horizontal y una inclinada (trazadas con color rojo).

» En la recta horizontal, para los valores de x que van de 0 a 100, el valor que corresponde a y siempre es 150, es decir, el valor de y no cambia aunque el de x sí lo haga. Entonces, para valores de x menores o iguales a 100, la expresión algebraica es $y =$ 150.

» Subrayen la expresión algebraica que corresponde a los valores de x mayores que 100.

$y = \frac{2x}{3}$ $\quad$ $y = 3x$ $\quad$ $y = \frac{3x}{2}$ (subrayada) $\quad$ $y = 2x$

b) Anoten las expresiones algebraicas correspondientes a la relación entre la duración de una llamada de teléfono público a casa y su costo (gráfica 4).

Para valores de x menores o iguales a 3 min, $y =$ 5.

Para valores de x mayores a 3 min, $y =$ $x + 2$.

c) Verifiquen, a partir de la gráfica, que las expresiones algebraicas que anotaron sean correctas; en caso contrario, corrijan lo necesario.

Las gráficas que corresponden a relaciones de proporcionalidad directa son puntos de una recta que pasa por el origen.

BLOQUE 1

Secuencia 4 / lección 13

Tiempo, distancia, velocidad

CONTENIDO Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

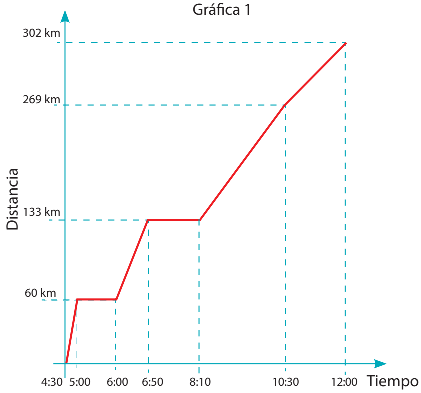
resolver

1. La gráfica 1 corresponde al recorrido de un tráiler, del Distrito Federal a la ciudad de Morelia. Lee la bitácora de viaje (informe que el chofer presenta a la empresa acerca del recorrido) e interpreta la gráfica para contestar las preguntas.

Bitácora de viaje

- Salí del Distrito Federal el viernes 25 de marzo a las 4:30 de la mañana.
- Me detuve sólo dos veces: la primera en Toluca, para cargar diésel y poner la lona; la segunda en la caseta de cobro, poco antes de Atlacomulco, para almorzar.
- De Zinapécuaro a Morelia, el camino estaba en reparación.

Gráfica 1



a) ¿De cuántos kilómetros fue el recorrido del tráiler? 302 km

b) ¿Cuánto tiempo duró? 7 h con 30 min

c) ¿En qué momento el tráiler avanzó más rápido? Entre las 4:30 y las 5:00.

d) ¿En cuál avanzó más despacio? Entre las 10:30 y las 12:00.

e) ¿A qué velocidad promedio recorrió el primer tramo de 60 km? 120 km/h

f) ¿Cuánto tiempo se detuvo el chofer la primera vez? 1 h

g) ¿Y la segunda? 1 h con 20 min

h) ¿La distancia que recorrió el tráiler y el tiempo transcurrido cambian de manera proporcional? No. Justifica tu respuesta. R. T. La gráfica no es una recta.

i) Completa la tabla indicando en qué lugar estaba el tráiler y qué hacía el chofer en las horas indicadas.

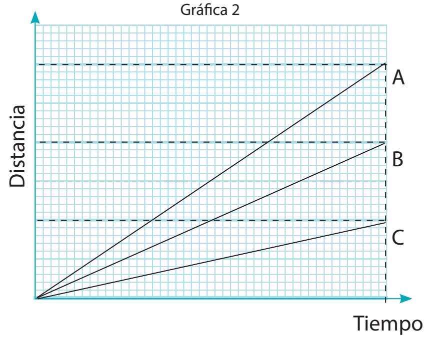
Hora	Lugar en el que se encontraba el tráiler	Actividad que llevaba a cabo el chofer
5:30	Toluca	Cargar diésel y colocar la lona
8:00	Antes de Atlacomulco	Almorzar
11:00	Hacia Morelia	Manejar

Compara tus resultados con los del resto del grupo. Luego comenten lo siguiente: ¿cómo se averigua, a partir de la gráfica, en qué parte el tráiler avanzo más rápido, y en cuál, más despacio?

2. La tabla y las rectas de la gráfica 2 corresponden al movimiento de tres ciclistas, A, B y C, que salieron al mismo tiempo del mismo lugar. Haz lo que se pide a continuación y responde las preguntas.

Ciclistas			
Minutos (x)	Km (y)	Km (y)	Km (y)
0	0	0	0
20	4	8	12
40	8	16	24
60	12	24	36
x	$y = \frac{1}{5}x$	$y = \frac{2}{5}x$	$y = \frac{3}{5}x$
	Ciclista C	Ciclista B	Ciclista A

Gráfica 2



a) Escribe en la parte inferior de cada columna la expresión algebraica correspondiente y a qué ciclista pertenece el recorrido.

comunicar

b) ¿Que ciclista avanzó más rápido? El A.

c) ¿Qué relación hay entre la velocidad de cada ciclista y la inclinación de su gráfica?

R. T. A mayor inclinación de la gráfica, más rápido va el ciclista.

d) Explica por qué la relación entre distancia recorrida y tiempo transcurrido de cada ciclista es una relación de proporcionalidad. R. T. En intervalos de tiempos iguales cda ciclista avanza la misma distancia.

conect@mos

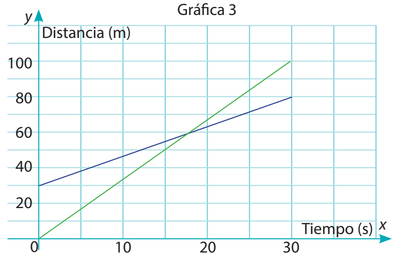
Conoce más acerca de las gráficas de relaciones proporcionales en recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/caracteristicas/carrera/actividad.html **Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta con el resto del grupo por qué en la pregunta 2 se menciona que la gráfica presentada es poco realista.**

3. María y Sonia corrieron durante 30 s para ver quién llegaba más lejos. Como María es más pequeña, Sonia la dejó iniciar 30 m adelante. Las rectas azul y verde de la gráfica 3 muestran la relación entre el tiempo y la distancia que recorrieron. Responde las preguntas en tu cuaderno y haz lo que se pide.

a) ¿Quién ganó la carrera y qué distancia recorrió? Sonia, 100 m
b) ¿Qué distancia recorrió la perdedora? 50 m
c) Si la carrera hubiera durado 15 s, ¿quién hubiera ganado? María
d) Escribe las expresiones algebraicas que relacionen el tiempo transcurrido con la distancia recorrida de cada niña.

María: $y = \frac{5}{3}x + 30$ Sonia: $y = \frac{10}{3}x$

Gráfica 3



4. Reúnete con tres compañeros. Comparen y comenten sus respuestas. Adviertan que, en algún momento, Sonia alcanza y rebasa a María. Averigüen a los cuántos segundos ocurre esto.

Sonia alcanza a María a los 18 s.

sm

Secuencia 5 / lección 14

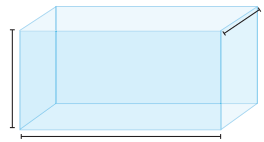
Un nuevo tipo de variación

CONTENIDO

Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

¿Cómo cambia el área de un rectángulo de perímetro fijo si se varía el ancho? Hasta ahora has estudiado principalmente expresiones algebraicas del tipo $y = mx + b$. Ahora estudiarás otro tipo de expresiones.

1. Se desea construir una pecera de 1 m de altura; además, el largo será el doble de lo que mida el ancho. Haz lo que se pide y contesta las preguntas.



a) Escribe cuatro medidas posibles para el largo y el ancho de la pecera.

R. T. Largo: 2 m   Largo: 1 m   Largo: 4 m   Largo: 3 m

Ancho: 1 m   Ancho: 0.5 m   Ancho: 2 m   Ancho: 1.5 m

b) Completa la tabla de medidas posibles para la pecera.

Ya sabemos...

El volumen de un prisma rectangular se calcula multiplicando largo por ancho por altura.

Medida del ancho (x)	Volumen de la pecera (y)
2.3 m	10.58 m^3
1.7 m	5.78 m^3
3.9 m	30.42 m^3
1.2 m	2.88 m^3

c) Plantea la expresión algebraica que relaciona el ancho con el volumen de la pecera. Si representas el ancho con x y el volumen con y, la expresión es $y =$ $(x)(2x) = 2x^2$.

d) Si el ancho mide una cantidad entera de centímetros, ¿la pecera puede tener un volumen exacto de 3 m^3? No. ¿Por qué? R. T. Si el ancho mide 122 cm, el volumen es de 2.97 m^3. si el ancho mide 123 cm, el volumen es de 3.02 m^3

2. En otra pecera de 1.5 m de ancho, la altura es la tercera parte del largo. Escribe en tu cuaderno la expresión algebraica que relaciona el largo (x) con el volumen (y).

$y = (x)(1.5)(\frac{1}{3}x) = 0.5x^2$

3. Para otra pecera, la expresión algebraica que relaciona la altura (x) con el volumen (y) es $y = (2)(3x)(x)$, o bien $y = 6x^2$. ¿Cómo se relacionan las medidas de esta pecera?

R. T. La altura vale 2 y el largo es el triple de la altura.

✷ Comenta tus respuestas con el grupo. En específico, mencionen si encontraron dos respuestas posibles para la pregunta anterior.

4. Juan debe trazar un rectángulo con perímetro de 50 cm. ¿Cuáles pueden ser sus medidas?

a) Encuentra tres soluciones distintas: R. T. 10, 15, 8, 17 y 9, 16

b) Si las medidas del rectángulo son números enteros (en centímetros), ¿cuántas soluciones distintas hay? Hay 12 soluciones.

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En relación con el inciso a), verifiquen que en cada caso el perímetro sea 50 cm; para el inciso b), asegúrense de anotar exactamente cuántas soluciones hay, aunque no las expliquen todas.**

5. **En la actividad anterior, si un lado del rectángulo mide 8 cm, ¿cuánto debe medir el otro para que el perímetro sea de 50 cm?** 17 cm **¿Y si mide 13 cm?** 12 cm **¿Y con 24 cm?** 1 cm

a) Si un lado del rectángulo mide x, ¿cuanto mide el otro lado (en términos de x)? $25 - x$

Explica tu razonamiento. R. T. La suma del largo y el ancho debe ser 25 cm. Si ancho + largo = 25, entonces ancho = 25 − largo.

b) Escribe, con base en tu razonamiento anterior, una ecuación que relacione el área del rectángulo con la medida de ambos lados; si representas el área del rectángulo con la letra A y la longitud de un lado, con x, la ecuación es $A = x(25 - x)$

c) Utiliza tu ecuación para calcular el área del rectángulo si el ancho es 11 cm: 154 cm^2

d) Considera los tres rectángulos que propusiste en el inciso a) de la actividad 4. Sustituye en la ecuación anterior la letra x por la medida de un lado de cada uno de esos rectángulos. Comprobarás que éstos tienen distintas áreas, aunque sus perímetros coincidan.

* **Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, averigüen si todos plantearon ecuaciones iguales o equivalentes; si algunas no lo son, determinen cuáles son incorrectas y corrijan lo necesario.**

6. **Juan trazará más rectángulos con perímetro fijo, pero ahora debe ser distinto de 50 cm. La ecuación que relaciona el área de cada rectángulo (A) con la medida de uno de sus lados (x) es $A = x\,(18 - x)$, o bien, $A = 18x - x^2$.**

¿Cuánto mide esta vez el perímetro fijo? 36 cm

* **Lee y comenta la siguiente información con tus compañeros.**

Una ecuación en la que el exponente más grande de la variable es 2 se llama **cuadrática** o **de segundo grado**. Por ejemplo, la ecuación $A = 25x - x^2$, es de segundo grado, pues la variable x aparece elevada al cuadrado.

conect@mos

Observa más ejemplos de ecuaciones cuadráticas en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/cruz_griega/actividad.html

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Si tienen dudas acerca de cómo debe elaborarse la gráfica de la pregunta 8, pidan ayuda al profesor. Al finalizar, validen, en grupo, sus respuestas.

Ya sabemos...

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si al simplificarlas se obtiene la misma expresión.

Secuencia 5 / lección 15

Planes de ahorro I

CONTENIDO

Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

resolver

En todos los problemas de esta lección y las dos siguientes puedes usar calculadora.

1. Los alumnos de primer grado planean hacer un viaje al terminar la secundaria. Necesitarán $4 000.00 y quieren empezar a ahorrar a partir de mayo de su primer año, y terminar, a más tardar, en junio del tercero. Como Leonardo quiere ir al viaje, su papá le ha ofrecido tres posibilidades para ayudarlo a ahorrar.
   - Darle $130.00 cada mes
   - Darle en un inicio $1 200.00 y después $15.00 cada semana
   - Darle lo que pueda cada semana, desde $0.00 hasta $100.00

   a) ¿Qué plan le conviene a Leonardo? Le conviene más el primer plan.

   b) Modifica el plan que elegiste para garantizar un ahorro de $4 000.00. Considera la posibilidad de fijar una cuota inicial, el número de cuotas y su distribución temporal (semanal, mensual, etcétera), además del dinero que se entregará en cada cuota.

   R. P.

2. Ten en cuenta que el segundo plan se puede mejorar al guardar los $1 200.00, pero en lugar de $15.00 por semana, juntar $120.00 al mes. Comprueba que, de esta manera, en abril del tercer año Leonardo habrá reunido los $4 000.00.

A los planes de ahorro en los que se guarda una cantidad fija cada cierto tiempo (cada semana, cada mes, cada trimestre…) se les llama **planes de cuota fija**. En estos planes puede haber una cuota inicial.

3. Para ahorrar $3 400.00, Leticia dará una cuota inicial de $600.00 y una fija de $200.00.

   a) ¿Cuántos plazos se deben cumplir para lograr su propósito? 14

   b) ¿Y si la cuota inicial fuera de $400.00? 15

4. Tania y Gilberto ahorrarán, cada uno, $4 000.00 en 12 plazos. La cuota inicial de Tania es de $2 200.00 y la de Gilberto, de $160.00. ¿Qué cuota fija necesita dar cada uno?

   Tania, $150.00; Gilberto $320.00

5. Alma y Cynthia también irán al viaje. Cynthia recibe una cantidad más o menos estable de dinero cada mes, por lo que ha decidido ahorrar con un plan de cuota fija. En cambio, Alma considera que no le conviene un plan de este tipo; ella prefiere uno en el que cada mes aporte más dinero que en el anterior.

a) Propón un plan de ahorro adecuado para Alma.

R. P.

- Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Después lean lo siguiente y contrasten los datos con sus respuestas de la actividad 5. En particular, comenten si alguno de ustedes propuso algún plan de ahorro similar al del recuadro.

Otro tipo de plan de ahorro es el de **cuota creciente**. En éste, la cuota aumenta al sumar en cada ocasión la misma cantidad que se aportó la vez anterior y la que se ahorró durante el primer plazo. Por ejemplo, al inicio Alma da \$15.00; en el primer plazo, \$20.00; en el segundo, \$20.00 + \$20.00; en el tercero, \$20.00 + \$20.00 + \$20.00; y así sucesivamente.

6. Si Alma escoge el plan de ahorro de cuota creciente que se describe arriba, ¿cuánto tendrá ahorrado después de siete meses? \$575.00

a) Llena la tabla para verificar tu respuesta y calcular lo que Alma tendrá ahorrado después de 10 meses.

Mes	Cuota (\$)	Ahorro acumulado
1	15 + 20	35
2	20(2) = 40	35 + 40 = 75
3	20(3) = 60	75 + 60 = 135
4	20(4) = 80	135 + 80 = 215
5	20(5) = 100	215 + 100 = 315
6	20(6) = 120	315 + 120 = 435
7	20(7) = 140	435 + 140 = 575
8	20(8) = 160	575 + 160 = 735
9	20(9) = 180	735 + 180 = 915
10	20(10) = 200	915 + 200 = 1115

b) Modifica el plan de ahorro de Alma, de manera que siga siendo de cuota creciente, pero que permita tener al menos \$4 000.00 en 10 meses. Calcula la cuota inicial y la del primer plazo.

resolver

R. T. Cuota inicial de \$150.00 y \$70.00 el primer mes, \$140.00 el segundo, \$210.00 el tercero, etc.; se ahorran \$4000.00 en diez meses.

- Compara tu plan con los de tus compañeros. Si varios propusieron el mismo, formulen otro con la participación de todo el grupo.

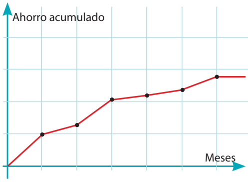
Secuencia 5 / lección 16

Planes de ahorro II

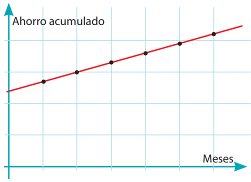
CONTENIDO
Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

1. **Analiza los siguientes planes de ahorro y sus representaciones gráficas.**

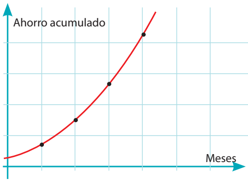
» Miranda dio una cuota inicial de $1 200.00 y ha estado ahorrando $150.00 cada mes.
» Isabel sólo ahorra lo que le sobra de su mesada.
» Arturo dio una cuota inicial de $600.00 y ahorra $300.00 cada mes.
» Cynthia inició con una cuota de $150.00; el primer mes dio $200.00; el segundo, $400.00; el tercero, $600.00; y así sucesivamente. Cada mes ahorra $200 .00 más que el anterior.



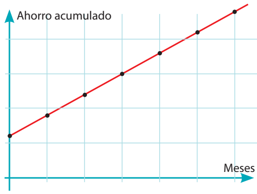
Isabel



Miranda



Cynthia



Arturo

a) Escribe sobre las líneas azules a quién corresponde cada gráfica.

✹ **Verifica, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten lo siguiente: dos de las gráficas no son líneas rectas, pero son muy diferentes entre sí. ¿Qué las distingue? ¿Cuál es la más irregular de ambas y a quién corresponde ese ahorro?**

técnicas

2. **Haz lo que se pide para obtener la expresión algebraica de un plan de cuota creciente.**

a) Considera un plan sencillo sin cuota inicial y con un primer plazo de $2.00.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	2	6	12	20	30	42	56

Reflexionamos
A partir de las gráficas de la actividad anterior, explica por qué la expresión algebraica de un plan de cuota creciente no puede ser de la forma $y = mx + b$.

Con cualquiera de las siguientes expresiones algebraicas es posible calcular el ahorro acumulado (A) en el plazo n.

» $A = n(n + 1)$
» $A = n^2 + n$

b) Completa la tabla del inciso anterior usando cualquiera de las dos expresiones anteriores. Después calcula el ahorro acumulado en el plazo 20. $20^2 + 20 = 400 + 20 = 420$

La expresión usada servirá como base para determinar la expresión algebraica de cualquier plan de cuota creciente.

c) Considera un plan en que no haya cuota inicial y la del primer plazo sea de $10.00; completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	10	30	60	100	150	210	280

Ahorro acumulado en el plazo 20 = $2 100.00

Ahorro acumulado en el plazo *n* = R. T. $5(n^2 + n)$, o cualquiera equivalente

d) Considera un plan sin cuota inicial y cuya cuota en el primer plazo sea de $34.00. Completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	34	102	204	340	510	714	952

Ahorro acumulado en el plazo 20 = $7 140

Ahorro acumulado en el plazo *n* = R. T. $17(n^2 + n)$, u otra equivalente

» Subraya las expresiones que sirvan para determinar el ahorro acumulado en el plazo *n*.

$17n(n + 1)$ $\qquad$ $34n + 1$ $\qquad$ $17n^2 + 17n$ $\qquad$ $17n^2 + 1$

En un plan de cuota creciente, sin cuota inicial y donde *C* representa la cuota del primer plazo, la expresión para calcular el ahorro acumulado en el plazo *n* es la siguiente.

Ahorro acumulado en el plazo *n*: $\frac{C}{2}(n)(n + 1)$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n$

e) Considera un plan cuya cuota inicial sea de $150.00 y la del primer plazo, de $34.00; completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	184	252	354	490	660	864	1102

Ahorro acumulado en el plazo 20 = $7 290.00

Ahorro acumulado en el plazo *n* = R. T. $150 + 17(n^2 + n)$, u otra equivalente

Una pista

La cuota del primer plazo ($10.00) es cinco veces la del inciso anterior. Verifica que ocurra lo mismo con el ahorro acumulado en cada plazo de ambos planes.

Reflexionamos

¿Cuál es la fórmula de un plan de ahorro en el que no hay cuota inicial y la cuota del primer plazo es 2 × 13.4?

Lee, en grupo, la siguiente información. Contrástenla con sus respuestas de la actividad 2.

En cualquier plan de cuota creciente con cuota inicial C_0 y cuota de primer plazo *C*, la expresión para calcular el ahorro acumulado en el plazo *n* es la siguiente.

Ahorro acumulado en el plazo *n*: $\frac{C}{2}(n)(n + 1) + C_0$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n + C_0$

Las expresiones que corresponden a planes de cuota creciente son **cuadráticas**, porque el exponente más grande al que se eleva *n* es 2, es decir, ***n* está elevada al cuadrado**.

Secuencia 5 / lección 17

Planes de ahorro III

CONTENIDO

Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Reflexionamos

Sin la expresión algebraica, ¿cuántas operaciones se requerirían para determinar el ahorro acumulado en los 37 plazos?

1. Resuelve los problemas. Utiliza la información del recuadro final de la lección anterior.

Plan de cuota creciente. Ahorro acumulado en el plazo n: $\frac{C}{2}(n)(n+1) + C_0$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n + C_0$

a) Considera un plan de cuota creciente cuya cuota inicial sea de $120.00 y de $70.00 en el primer plazo. Plantea la expresión algebraica correspondiente y verifica que el ahorro acumulado en 37 plazos sea de $49 330.00. $\frac{70}{2}n(n+1) + 120$, $35(37)(38) + 120 = 49330$

b) Considera los planes de Alma (el original y el que elaboraste), incluidos en la actividad 6 de la lección "Planes de ahorro I". Utiliza las expresiones algebraicas correspondientes para verificar tus respuestas anteriores.

- Verifica las respuestas, en grupo y con ayuda del profesor. Después lean lo siguiente.

Cuando se usan sólo tablas, los cálculos necesarios para determinar la cantidad reunida en determinado tiempo se vuelven largos y complicados. Las expresiones algebraicas a veces funcionan como fórmulas que los facilitan mucho. También son útiles para comparar el crecimiento del ahorro acumulado en distintos planes.

2. Haz lo siguiente para obtener la fórmula de cualquier plan de cuota fija.

a) Determina la expresión algebraica del ahorro acumulado en el plazo n, para el caso en que no hay cuota inicial y se aportan $25.00 de cuota fija.

Ahorro acumulado en el plazo n: $25n$

b) Haz lo mismo para el caso con $100.00 de cuota inicial y $25.00 de cuota fija.

Ahorro acumulado en el plazo n: $25n + 100$

c) Explica por qué, en un plan de cuota inicial C_0 y cuota fija C, el ahorro acumulado en el plazo n es $Cn + C_0$. R. T. Porque la cuota fija se debe multiplicar por el número de plazos y sumar a la cuota inicial.

Reflexionamos

Justifica por qué las expresiones algebraicas que corresponden a planes de cuota fija siempre son de la forma $y = mx + b$.

3. Elabora en tu cuaderno dos planes: uno de cuota fija y otro de cuota creciente, en los cuales se garantice un ahorro de $5 000.00 al cabo de 10 plazos (el ahorro no debe exceder los $5 300.00). R. T. Cuota fija: $500n$. Cuota creciente: $\frac{91}{2}(n)(n+1)$

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen que todos los planes propuestos permitan obtener el ahorro que se pide. Después analicen si, en general, la cuota del primer plazo en los planes de cuota fija fue más alta que la de los planes de cuota creciente, o al revés. Anoten en su cuaderno sus conclusiones. R. P.

4. A continuación se proporcionan las expresiones algebraicas de dos planes de ahorro, uno de cuota fija y uno de cuota creciente. Haz lo que se pide.

Plan A: ahorro acumulado en el plazo $n = 20n^2 + 20n + 18$

Plan B: ahorro acumulado en el plazo $n = 500n + 1\,000$

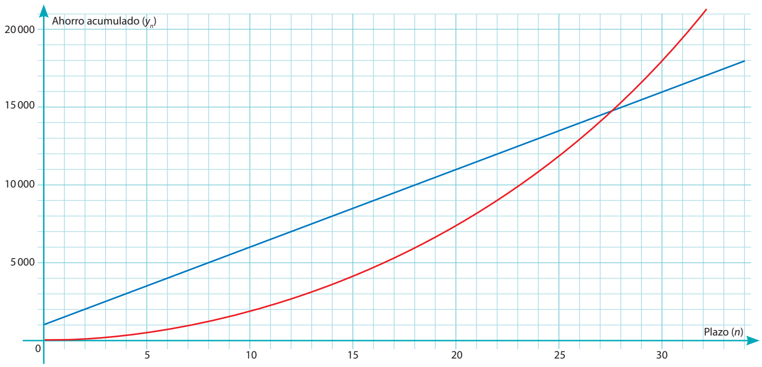
a) Anota, sin hacer cálculos y para cada frase, una F si consideras que la oración es falsa, o una V si piensas que es verdadera.

» El plan B siempre permite ahorrar más, pues 500 y 1 000 son considerablemente mayores que 20 y 18. F

» El plan B permitirá ahorrar más al inicio, pero después de cierto tiempo se ahorrará más con el A. V

» Las cuotas del plan A crecen, mientras que las del B son fijas. Por ello, desde el inicio se ahorra más con el primero. F

b) La siguiente gráfica representa la relación entre el número de plazos y el ahorro acumulado para los planes del inciso anterior. La recta azul corresponde al plan de cuota fija y la roja, al de cuota creciente. Utilízalas para verificar tus respuestas del inciso anterior.



c) Entre el plazo 5 y el 8, ¿cuánto aumenta el ahorro en cada plan? El plan A aumenta $840.00. El plan B aumenta $1500.00

d) Entre el plazo 25 y el 28, ¿cuánto aumenta el ahorro en cada plan? El plan A aumenta $3240.00. El plan B aumenta $1500.00

conect@mos

Descarga la actividad de relaciones cuadráticas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar comenten, en grupo y con ayuda del profesor, cómo encontraron la expresión algebraica de cada relación.

validar

Lee, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información y contrástenla con sus respuestas de la actividad anterior.

Al comparar los resultados se advierte que, conforme aumentan los plazos, el ahorro acumulado también lo hace. No obstante, la altura de la gráfica del plan de cuota fija aumenta de manera constante (la cuota en cada plazo siempre es la misma), mientras que la altura de la gráfica del plan de cuota creciente aumenta cada vez más (la cuota de cada plazo siempre es mayor que la del anterior). Ésta es una diferencia visible entre las funciones cuadráticas y las funciones lineales.

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 18

Laberinto de tubos

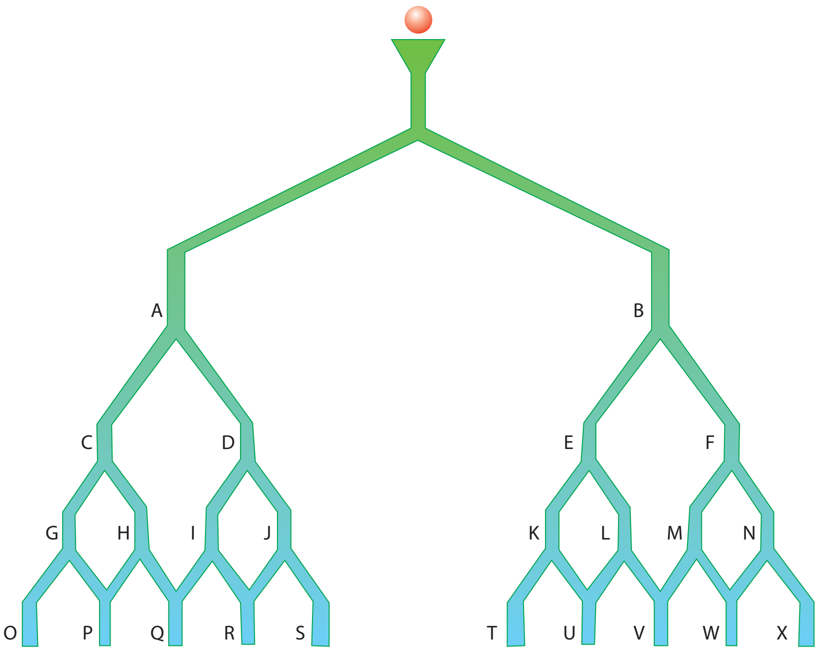
CONTENIDO

Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

¿Puede haber probabilidades mayores a 100%? ¿En qué casos el hecho de que un evento ocurra influye en la posibilidad de que suceda otro? Al analizar un evento A, ¿te has fijado en el evento que consiste en que A no ocurra?

resolver

1. Se deja caer una canica por el orificio superior del siguiente laberinto de tubos.



Ya sabemos...

La probabilidad de un evento es la razón entre el número de resultados favorables y el de resultados posibles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo **A**? $\frac{1}{2}$

b) ¿Y de que caiga por el **B**? $\frac{1}{2}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo **E**? $\frac{1}{4}$

d) ¿Y por el **M**? $\frac{1}{8}$

e) Explica en tu cuaderno por qué la probabilidad de que la canica caiga por el tubo **R** es mayor que la probabilidad de que lo haga por el **S**. R. T. El tubo R está conectado a los tubos I y J, mientras que el tubo S sólo a J.

sm

f) Explica por qué la probabilidad de que la canica caiga por los tubos **C**, **D**, **E** o **F** es igual.

R. T. Porque cada uno está conectado a un solo tubo (A o B) los cuales tienen la misma probabilidad.

Reflexionamos

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 verdes y 5 moradas. Si se toma una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

Si se suelta una canica en el orificio de arriba, es seguro que caiga por el tubo A o por el B. Numéricamente, esto se expresa de la siguiente manera.

Probabilidad de que caiga por A		Probabilidad de que caiga por B		Probabilidad de que caiga por A o por B
$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{2}$	=	1

o bien,

Probabilidad de que caiga por A		Probabilidad de que caiga por B		Probabilidad de que caiga por A o por B
50%	+	50%	=	100%

Algo que tiene probabilidad 1, es seguro que ocurra, y si tiene probabilidad 0, es imposible que suceda.

2. Las siguientes sumas expresan el total de probabilidades en cada nivel del laberinto. Complétalas.

a) De A a B: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ o bien, 50% + 50% = 100%

b) De C a F: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ o bien, 25% +25% +25% +25% = 100%

c) De G a N: $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ o bien,

12.25% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 12.25% = 100%

d) De O a X: $\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=1$ o bien,

6.125% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 6.125% + 6.125% + 12.25% + 12.25% + 12.25% + 6.125% = 100%

Reflexionamos

En algunos casos puede haber porcentajes mayores a 100%. Por ejemplo, el precio de un producto puede aumentar 120%. ¿Por qué no es posible tener una probabilidad mayor a 100%?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo **S**? $\frac{1}{16}$

a) ¿Y por el **R**? $\frac{1}{8}$

b) ¿Por qué la probabilidad de que la canica caiga por el tubo **W** es el doble que la probabilidad de que lo haga por el **X**? R. T. Porque W está conectado a dos tubos; es decir, la canica tiene caminos para entrar a W; en cambio X sólo está conectado a un tubo.

Como podrás notar, la medida de la probabilidad, cuando es de 0 a 1, se expresa con fracciones o decimales, mientras que, cuando es de 0 a 100%, se expresa con porcentaje.

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 19

La ruleta I

CONTENIDO

Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

En contexto

La función del 0 y el 00 es asegurar un margen de ganancia a las casas de apuestas. Estos números no se consideran pares ni impares, ni rojos o negros.

1. Los jugadores de la ruleta pueden colocar sus apuestas de varias maneras: apuestan a números individuales o a conjuntos de números. Anota al menos tres eventos diferentes en los que hagan apuestas con dichas especificaciones.

Evento 1: R. T. Todos los números rojos

Evento 2: Los números pares

Evento 3: Los números negros



conect@mos

Descarga la actividad de medida de la probabilidad en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comenten por qué la probabilidad de un evento siempre es un número entre 0 y 1.

2. Trabaja en equipo. Completen la tabla escribiendo la probabilidad de que un jugador gane con cada evento señalado.

Eventos	Probabilidad
A: "La ruleta se detiene en el 22".	$\frac{1}{38}$
B: "La ruleta se detiene en color rojo".	$\frac{18}{38}$
C: "La ruleta se detiene en color rojo o negro".	$\frac{36}{38}$
D: "La ruleta se detiene en un número par".	$\frac{18}{38}$
E: "La ruleta se detiene en un número impar".	$\frac{18}{38}$
F: "La ruleta se detiene en el número 15".	$\frac{1}{38}$
G: "La ruleta se detiene en un número menor que 10 y mayor que 0".	$\frac{9}{38}$
H: "La ruleta se detiene en casilla verde".	$\frac{2}{28}$
I: "La ruleta se detiene en un número distinto de 15".	$\frac{37}{38}$

3. Trabaja en equipo. Completen la tabla.

comunicar

Eventos	Resultados favorables	Probabilidad…		
		con una razón	con una fracción	con un decimal
A o B	{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}	19 de 38	$\frac{19}{38}$	0.50
B o G	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}	22 de 38	$\frac{22}{38}$	0.578947
A o B o G	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}	23 de 38	$\frac{23}{38}$	0.60526
E o F	{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35}	18 de 38	$\frac{18}{38}$	0.47368
B y D	{12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36}	8 de 38	$\frac{8}{38}$	0.21
B y G	{1, 3, 5, 7, 9}	5 de 38	$\frac{5}{38}$	0.1315789
D y F	No hay.	0 de 38	$\frac{0}{38}$	0
H e I	{0, 00}	2 de 38	$\frac{2}{38}$	0.05263

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Después lean la siguiente información y úsenla para verificar sus respuestas de la tabla anterior.

La unión de dos eventos, X o Y, ocurre cuando sucede X o cuando sucede Y. La intersección, X y Y, se da cuando ocurren ambos. Los siguientes ejemplos demuestran lo anterior.

» El evento A o B ocurre cuando la ruleta se detiene en el número 22 o en color rojo.

» El evento B y D ocurre cuando la ruleta se detiene en color rojo y en número par.

4. Lee la información y haz lo que se pide.

El evento A es un evento simple porque sólo tiene un resultado favorable, mientras que tanto el B como el D son eventos compuestos, pues tienen más de un resultado favorable.

a) Determina, para cada evento de la tabla anterior, cuáles son simples y cuáles compuestos.

Simples: A y F. Compuestas: B, C, D, E, G, H e I.

b) Escribe tres eventos simples y tres eventos compuestos que no aparezcan en las tablas anteriores.

R. P.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Secuencia 6 / lección 20

La ruleta II

CONTENIDO

Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. Considera nuevamente la ruleta de la lección anterior. Resuelve lo siguiente.

a) En una jugada, la ruleta se detuvo en el número 6 y un jugador ganó. Anota tres eventos a los que el jugador pudo haber apostado.

Evento 1: R. P.

Evento 2: ____

Evento 3: ____

b) Un jugador apostó al evento F y otro, al evento G. ¿Podrían ganar ambos? No.

¿Por qué? R. T. Porque sus eventos no tienen resultados favorables en común.

c) Un jugador apostó al evento E y otro, al evento B. ¿Podrían ganar ambos? Sí.

¿Por qué? R. T. Los resultados 1, 3, 5, 7, 9, 19, 21, 23, 25 y 27 son comunes.

d) Inés y Sofía han hecho apuestas distintas, pero si la ruleta cae en 2, 4, 6 u 8, ganarán ambas. Anota en tu cuaderno, para cada una de ellas, una apuesta que podrían haber hecho. R. P.

e) Nicolás y Alfredo han hecho apuestas distintas, y es imposible que ambos ganen. Anota en tu cuaderno, para cada uno de ellos, una apuesta que podrían haber hecho.
R. P.

2. En la siguiente tabla se muestran parejas de eventos relacionados con la ruleta de la lección anterior. Algunos tienen elementos en común y otros no.

Eventos sin elementos en común	Eventos con elementos en común
A y B	D y G
D y E	B y G

a) Inventa y escribe dos eventos distintos, J y K, que puedan ocurrir simultáneamente; y dos eventos distintos, L y M, que no puedan ocurrir al mismo tiempo.

R. P.

✷ Comenta, con tus compañeros y el profesor, la siguiente información. Úsenla para verificar sus respuestas de la actividad anterior.

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando **no tienen elementos en común**, es decir, si **no pueden ocurrir al mismo tiempo.** Por ejemplo, los eventos A y B son mutuamente excluyentes, pues el número 22 no es rojo. En cambio, los eventos D y G no son mutuamente excluyentes, pues tienen en común los números pares menores que 10 (2, 4, 6 y 8).

3. En la siguiente tabla se reunieron parejas de eventos complementarios y no complementarios de la ruleta y del laberinto de tubos.

	Eventos complementarios	Eventos no complementarios
Lección 19	eventos **C** y **H**	eventos **B** y **D**
	eventos **F** e **I**	eventos **I** y **E**
Lección 20	La canica pasa por **A**. La canica pasa por **B**.	La canica pasa por **C**. La canica pasa por **D**.
	La canica pasa por **C** o **D**. La canica pasa por **E** o **F**.	La canica pasa por **B**. La canica pasa por **C**, **D** o **E**.

Ya sabemos...

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles; por ejemplo, el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas es {AA, AS, SA, SS}.

a) Inventa dos eventos complementarios para la ruleta.

R. P. y ______

b) En las parejas de eventos de la tabla anterior, encuentra un ejemplo para cada caso.

comunicar

» Dos eventos que abarquen todo el espacio muestral y tengan elementos en común I y E
» Dos eventos que abarquen todo el espacio muestral pero sin elementos en común C y H
» Dos eventos con elementos en común y que no abarquen todo el espacio muestral B y D
» Dos eventos sin elementos en común y que no abarquen todo el espacio muestral
La canica pasa por D y la canica pasa por C

✹ Comenta la siguiente información con tus compañeros y el profesor. Úsenla para verificar su respuesta al inciso a) y describir el complementario de los siguientes eventos de la lección 18.

La canica pasa por C. La canica pasa por H. La canica pasa por Q.

Si dos eventos, **X** y **Y**, abarcan **todo el espacio muestral y carecen de elementos comunes**, son **complementarios.** Por ejemplo, los eventos **C** y **H** son complementarios, pues **H** tiene todos los resultados que no están en **C** (los resultados que no son rojos o negros son forzosamente verdes), y viceversa.

4. Anota en tu cuaderno un ejemplo para cada uno de los siguientes casos. Si consideras que alguno no se puede ejemplificar, explica por qué.

a) Dos eventos mutuamente excluyentes, pero no complementarios R. T. Eventos B y D en la ruleta.
b) Dos eventos complementarios, pero no mutuamente excluyentes R. T. No se puede ejemplificar, los eventos complementarios no tienen elementos comunes; es decir, siempre son mutuamente excluyentes.

✹ Comenta, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Después determinen qué incisos de la actividad 1 corresponden a eventos mutuamente excluyentes.

Dos **eventos complementarios** nunca tienen elementos en común, por lo que forzosamente son **mutuamente excluyentes**. En cambio, **hay eventos mutuamente excluyentes** que no abarcan todo el espacio muestral, **así que no son complementarios**, como los eventos D y E de la lección anterior.

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 21

¿El resultado depende de los anteriores?

CONTENIDO Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

resolver

1. Trabaja en equipo. Analicen la siguiente información.

Para salir del aeropuerto en viajes internacionales, hay que apretar el botón de un semáforo; si se prende el foco rojo, los guardias revisan el equipaje; si lo hace el verde, no. El semáforo funciona de manera que es igualmente probable que se prenda cualquier foco. Entonces, si se ha encendido el foco verde con cuatro personas consecutivas, ¿la probabilidad de que se encienda nuevamente con la siguiente persona es $\frac{1}{2}$, más de $\frac{1}{2}$ o menos de $\frac{1}{2}$? Es de $\frac{1}{2}$

a) Expliquen si están de acuerdo o no con cada respuesta.

» Como se ha encendido la luz verde con las últimas cuatro personas, hay una "buena racha" de luces verdes; por eso es muy probable que a la siguiente persona también le corresponda dicha luz. Es decir, la probabilidad de que nuevamente se prenda la luz verde es mayor que $\frac{1}{2}$.

R. P.

» Como la probabilidad de que se encienda cada luz es de 50%, se espera que, al apretar muchas veces el botón, aproximadamente la mitad de las veces se encienda la luz verde y la otra mitad, la roja. Pero como se ha prendido la luz verde con la últimas cuatro personas, ya es momento de que se encienda la roja para compensar; por tanto, es poco probable que se prenda la luz verde con la siguiente persona. Es decir, la probabilidad de que nuevamente se encienda la luz verde es menor que $\frac{1}{2}$.

R. P.

» Cada vez que se aprieta el botón, la probabilidad de que se encienda el foco verde es 50%; esto no tiene nada que ver con la cantidad de veces que haya salido anteriormente. Así, la probabilidad de que nuevamente se prenda la luz verde es exactamente $\frac{1}{2}$.

R. P. (Esta afirmación es la correcta)

Ya sabemos...

Entre más veces se repite un experimento, la frecuencia relativa se aproxima cada vez más a la probabilidad teórica.

Revisen, con ayuda del profesor, sus respuestas. No es necesario que lleguen a un acuerdo por ahora, pero sí que planteen claramente las distintas opiniones.

2. En el problema de la actividad anterior, si el foco se prende una vez, el espacio muestral es {verde, rojo}. Determina el espacio muestral del experimento en los siguientes casos.

a) Al prender el foco dos veces: {VV, VR, RV, RR}

b) Al prender el foco tres veces: {VVV, VVR, VRV, VRR, RVV, RVR, RRV, RRR}

c) Al prender el foco cuatro veces: {VVVV, VVVR, VVRV, VVRR, VRVV, VRVR, VRRV, VRRR, RVVV, RVVR, RVRV, RVRR, RRVV, RRVR, RRRV, RRRR}

d) Al prender el foco cinco veces: {VVVVV, VVVVR, VVVRV, VVVRR, VVRVV, VVRVR, VVRRV, VVRRR, VRVVV, VRVVR, VRVRV, VRVRR, VRRVV, VRRVR, VRRRV, VRRRR, RVVVV, RVVVR, RVVRV, RVVRR, RVRVV, RVRVR, RVRRV, RVRRR, RRVVV, RRVVR, RRVRV, RRVRR, RRRVV, RRRVR, RRRRV, RRRRR}

Ya sabemos...

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio muestral.

sm

e) Calcula, para cada inciso anterior, la probabilidad de que la última vez que se encienda el foco salga luz verde. Anota los resultados en tu cuaderno. Para todos los incisos la probabilidad de que al final salga luz verde es de $\frac{1}{2}$.

- Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Noten, en particular, que hay distintas maneras de representar los espacios muestrales; platiquen cuáles les parecen más prácticas. Después comenten la siguiente información.

Si aumenta el número de veces que se prende el foco, cambia el número de resultados posibles y también el de resultados favorables; pero la probabilidad de que la última vez se encienda el verde, es decir, **la razón entre los resultados favorables y los posibles se conserva**:

» $\frac{1}{2}$ si el foco se prende una vez: {**V**,R};

» $\frac{2}{4}$ si se prende dos veces: {**VV**, VR, **RV**, RR};

» $\frac{4}{8}$ con tres veces: {**VVV**, VVR, **VRV**, VRR, **RVV**, RVR, **RRV**, RRR};

» $\frac{8}{16}$ para cuatro veces: {**VVVV**, VVVR, **VVRV,** VVRR, **VRVV**, VRVR, **VRRV**, VRRR, **RVVV**, RVVR, **RVRV**, RVRR, **RRVV**, RRVR, **RRRV**, RRRR}.

En todos los casos, **en la mitad de los resultados posibles a la última persona le corresponde luz verde.** Por eso se puede afirmar que, si hay una fila de personas esperando para apretar el botón, **la última tiene 50% de probabilidad** de que no le revisen el equipaje, **sin importar qué tan larga sea la fila**.

3. Supón que hay cinco personas en la fila esperando para tocar el botón. Calcula en tu cuaderno la probabilidad de que se prenda la luz verde con la última persona si…

técnicas

» pasa la primera persona y sale luz verde, $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

» pasan la primera y la segunda persona y se prende la luz verde, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

» pasan las primeras tres personas y sale luz verde, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

» pasan las primeras cuatro personas y les corresponde luz verde. $\frac{1}{2}$

- Comenta con tus compañeros la siguiente información. Después revisen nuevamente las opiniones que dieron en la actividad 1 y, ahora sí, lleguen a una conclusión común.

Al aumentar la cantidad de personas a las que previamente les salió luz verde, **las cantidades de resultados posibles y de resultados favorables disminuyen** en cada caso (a la mitad), **pero como la razón entre ellas se conserva**, la **probabilidad de que a la última persona le corresponda luz verde no cambia**:

» $\frac{8}{16}$ si a la primera persona le salió luz verde: {**VVVVV**, VVVVR, **VVVRV**, VVVRR, **VVRVV**, VVRVR, **VVRRV**, VVRRR, **VRVVV**, VRVVR, **VRVRV**, VRVRR, **VRRVV**, VRRVR, **VRRRV**, VRRRR};

» $\frac{4}{8}$ si a las dos primeras les correspondió luz verde: {**VVVVV**, VVVVR, **VVVRV**, VVVRR, **VVRVV**, VVRVR, **VVRRV**, VVRRR};

» $\frac{2}{4}$ si se prendió la luz verde con las tres primeras: {**VVVVV**, VVVVR, **VVVRV**, VVVRR};

» $\frac{1}{2}$ si a las primeras cuatro les salió luz verde: {**VVVVV**, VVVVR}.

En todos los casos, **en la mitad de los resultados posibles a la última persona le corresponde luz verde.** Por tanto, la última persona tiene **50% de probabilidad** de que no le revisen el equipaje, **sin importar cuántas veces se haya encendido antes** la luz verde.

sm

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 22

Dependientes o independientes

CONTENIDO: Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. Trabaja en equipo. Analicen los siguientes casos y respondan las preguntas.

Caso 1	Caso 2
En una prueba de opción múltiple, Luis contestó al azar dos reactivos. Cada uno tenía cuatro opciones, de las cuales sólo una era correcta. Si Luis acertó en la primera pregunta, ¿la probabilidad de que lo haya hecho en la otra es $\frac{1}{4}$, más de $\frac{1}{4}$ o menos de $\frac{1}{4}$? $\frac{1}{4}$	Carlos lanzó tres veces una moneda y en todas cayó águila; Jesús hizo lo mismo y obtuvo águila-sol-sol. Ambos lanzarán su moneda una cuarta vez. ¿Quién tiene más probabilidad de obtener sol? Los dos igual.

resolver

a) Calculen, para el caso 1, la probabilidad de…

» acertar al responder al azar una pregunta con cuatro opciones de respuesta en la que sólo una de ellas es correcta; $\frac{1}{4}$

» acertar al responder al azar una segunda pregunta con cuatro opciones si ya se respondió correctamente la primera. $\frac{1}{4}$

b) Calculen, para el caso 2, la probabilidad de…

» lanzar cuatro volados y obtener sol en el último; $\frac{1}{2}$

» lanzar un volado y obtener sol, si los tres anteriores fueron águila; $\frac{1}{2}$

» lanzar un volado y obtener sol, si los tres anteriores fueron águila-sol-sol. $\frac{1}{2}$

Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus resultados. Cuando determinen las respuestas correctas, verifiquen que concuerden con sus conclusiones de la lección anterior.

técnicas

2. Considera el laberinto de tubos de la lección 18.

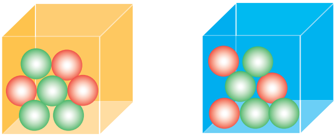
a) Al inicio del experimento, es decir, antes de soltar la canica, ¿qué probabilidad hay de que pase por el tubo **Q**? $\frac{1}{8}$

b) Si se suelta la canica y pasa por **A**, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a **Q**? $\frac{1}{4}$

c) Si la canica ya pasó por **C**, ¿cuál es la probabilidad de que termine en **Q**? $\frac{1}{4}$

d) Si la canica ya pasó por **G**, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en **Q**? 0

3. Se tienen dos urnas con siete pelotas. En la urna azul se hacen extracciones con remplazo, es decir, cada vez que se saca una bola, ésta se regresa a la urna y puede ser tomada la siguiente vez. En la urna amarilla se hacen extracciones sin remplazo.



» Calcula y escribe en la siguiente tabla las probabilidades que se piden.

Probabilidad de…	Urna amarilla	Urna azul
obtener bola roja en la primera extracción	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
obtener bola verde en la primera extracción	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$
obtener bola roja en la segunda extracción, si en la primera se obtuvo una roja	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$
obtener bola roja en la segunda extracción, si en la primera se obtuvo una verde	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$

En contexto

Para ampliar tus conocimientos sobre probabilidad y estadística con datos interesantes y concretos, lee *Esa condenada mala suerte*, de la Biblioteca de Aula.

Poskitt, Kjartan, *Esa condenada mala suerte*, México, SEP-Abrapalabra Editores, serie Espejo de Urania, 2005.

✷ Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 2 y 3. Discutan, en el caso de la 2, por qué cambian las probabilidades a medida que la canica avanza por el laberinto; y en la 3, por qué las probabilidades son distintas en cada urna. Después comenten la siguiente información y respondan en su cuaderno.

Dos eventos X y Y son **independientes** cuando **la probabilidad de que ocurra X es la misma si sucede Y o no.** Es decir, **la probabilidad de X no depende de la ocurrencia de Y** o, dicho en otras palabras, el hecho de que suceda **Y no cambia la probabilidad** de que lo haga **X.**

» ¿La probabilidad de obtener águila en un volado depende de lo que se ha obtenido en volados anteriores? No.

» En el laberinto de tubos, ¿el tubo en el que cae finalmente la canica depende de si pasa por **A** o por **B**? Sí.

» En una extracción con remplazo, ¿las probabilidades para la segunda bola son distintas que las de la primera? Son iguales.

» En una extracción sin remplazo, ¿las probabilidades para la segunda bola son distintas que las de la primera? Sí son distintas.

4. Elabora, en tu cuaderno, un resumen en el que definas los siguientes conceptos. Proporciona ejemplos de cada uno. R. P.

comunicar

» Eventos complementarios

» Eventos mutuamente excluyentes

» Eventos independientes

Secuencia 7 / lección 23

Preguntas adecuadas y no tan adecuadas

CONTENIDO

Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

Para saber algo se puede recabar información mediante preguntas, pero ¿con qué preguntas se obtiene información precisa y confiable?, ¿cómo se determina a la población que conviene entrevistar?, ¿cuál es la manera más adecuada para presentar resultados?

1. Contesta el cuestionario.

Nombre: R. P.

a) ¿Cuál es tu estatura? ____

b) ¿Estudias mucho? ____

c) ¿Qué deporte te gusta más? ____

d) ¿Tienes letra bonita? ____

e) ¿Cuántas habitaciones hay en tu casa? ____

2. Reúnete con algunos compañeros. Comparen sus respuestas y resuelvan lo que resta de la lección.

comunicar

3. Respondan de acuerdo con el inciso a) de la actividad anterior.

a) ¿La medida que anotó cada uno corresponde con su estatura al usar zapatos o no, o con ellos en algunos casos y sin ellos en otros? R. P.

b) ¿Hace cuánto tiempo se midió cada uno? R. P.

c) ¿Hubo alguien que no supiera su estatura y dio un número aproximado? ¿Quién? R. P.

d) Si quisieran saber con certeza la estatura actual de cada uno, ¿sería conveniente tener en cuenta lo que contestaron en el cuestionario? R. P.

e) ¿Cómo podrían recabar información precisa y confiable sobre la estatura de cada uno?

R. T. Midiéndolos

4. Supongan que un equipo de cuatro alumnos respondió lo siguiente en el inciso b) del cuestionario.

Alumno A: Sí (no estudia en las tardes, pero considera que pasar toda la mañana en la escuela es estudiar mucho).

Alumno B: Sí (además de asisitir a la escuela, todas las tardes estudia un promedio de tres horas).

Alumno C: No (sólo estudia en la escuela; al llegar a casa no abre ni un libro).

Alumno D: No (estudia todas las tardes, pero considera insuficientes sus esfuerzos porque su hermano estudia una hora más que él).

a) Comparen sus respuestas con las del ejemplo anterior y comenten si los criterios para decidir si estudian mucho o no son los mismos.

b) ¿La pregunta en sí permite averiguar quiénes estudian mucho y quiénes no? R. T.

No, es necesario cuantificar la cantidad de estudio, en lugar de usar las palabras "mucho" y "poco".

c) Si quisieran saber cuánto estudia en realidad cada uno, ¿qué pregunta formularían? R. T.

¿Cuántas horas estudias al día (o a la semana)?

Comenten las preguntas c), d) y e) del cuestionario. Anoten en su cuaderno para qué podrían servir las respuestas y cómo investigarían esos datos de manera adecuada.

conect@mos

Observa ejemplos de encuestas reales en

consulta.mx/web/

Trabaja en equipo. Busquen una encuesta de algún tema de su interés y analicen los datos presentados. Muestren al grupo los resultados de su análisis y comenten qué dificultades encontraron al trabajar con ella.

Un cuestionario es útil para recabar información. Sin embargo, hay que tener en cuenta lo siguiente.

- Es necesario plantear las preguntas de acuerdo con el propósito que se persigue.
- Para obtener datos puntuales, se debe preguntar exactamente lo que se desea saber; las preguntas deben ser cortas, fáciles de entender y de responder, de tal manera que la respuesta sea lo más precisa posible.
- Es recomendable probar el cuestionario con algunas personas y, en caso necesario, modificar o agregar preguntas antes de aplicarlo a la población de muestra.
- En algunas ocasiones es mejor recabar información de manera directa en lugar de hacer preguntas (como en el caso de las estaturas de los alumnos).

Secuencia 7 / lección 24

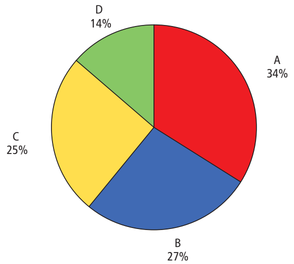
La presentación más adecuada

CONTENIDO

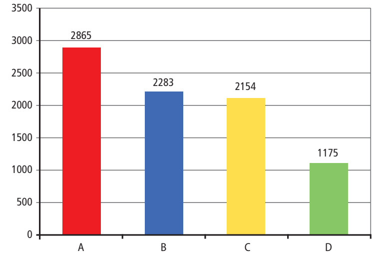
Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

1. **Los siguientes resultados fueron tomados de una encuesta efectuada a estudiantes de distintas escuelas.**
Las respuestas corresponden a la pregunta "¿Cuál es tu superhéroe favorito?" Ésta tiene cuatro opciones de respuesta (A, B, C y D), de entre las cuales la persona encuestada debe elegir una. Trabaja en equipo. Discutan y anoten en su cuaderno qué manera es la más adecuada para presentar los resultados de la encuesta y por qué. ¿cuáles son las ventajas y las desventajas de cada presentación?

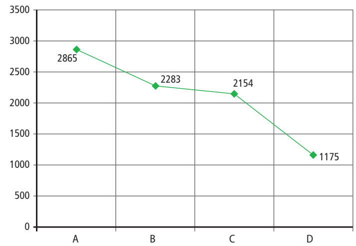
I ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



II ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



III ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



IV ¿Cuál es tu superhéroe favorito?

A	2 865
B	2 283
C	2 154
D	1 175

a) Dos presentaciones prácticamente muestran lo mismo. ¿Cuáles son? II y III

b) Una presentación no muestra la cantidad de personas entrevistadas. ¿Cuál es? I

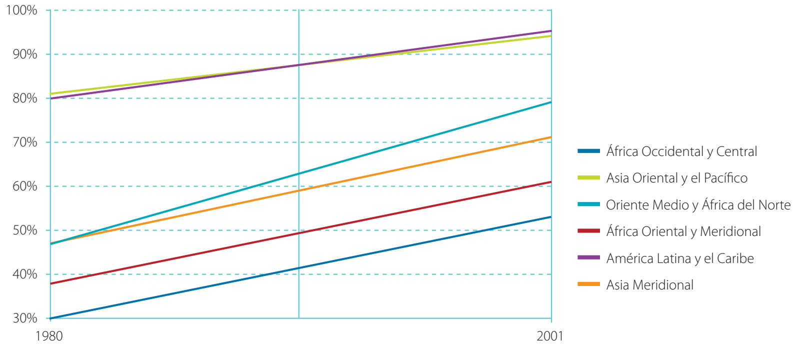
c) Una presentación muestra claramente qué parte de los votos obtuvo cada superhéroe; por ejemplo, indica que A fue el favorito de poco más de $\frac{1}{3}$ de los encuestados, mientras que una de cada cuatro personas eligió a C. ¿Cuál es esa presentación? I

d) En otra presentación, no es fácil identificar a primera vista qué parte de los votos obtuvo cada superhéroe. ¿En cuál ocurre esto? IV

2. Trabaja en equipo. Lean la información y respondan en su cuaderno.

En el año 2000 la Organización de las Naciones Unidas (ONU) fijó ocho objetivos con el fin de mejorar la calidad de vida de los ciudadanos del mundo. Uno de esos objetivos es garantizar que, para el año 2015, todos los niños del planeta tengan la oportunidad de terminar la escuela primaria.

La gráfica muestra, con datos agrupados por regiones, qué porcentaje del total de niñas en edad escolar asistían o estaban inscritas en la escuela primaria durante el periodo 1980-2001.



a) Si consideran únicamente los datos de 1980, ¿qué región estaba más rezagada para alcanzar el objetivo: Asia Meridional u Oriente Medio y África del Norte? Estaban prácticamente igual.

b) Si consideran únicamente los datos de 2001, ¿qué región estaba más cerca de alcanzar el objetivo: Asia Oriental y el Pacífico o América Latina y el Caribe? América Latina y el Caribe.

c) Considerando los datos de todo el periodo (1980-2001), ¿qué región ha tenido mayor avance en cuanto al objetivo propuesto? Oriente Medio y África del Norte.

d) Si la tendencia de cada gráfica continúa, es decir, si la asistencia/matriculación sigue aumentando al mismo ritmo, ¿qué regiones lograrán alcanzar el objetivo en 2015?
Asia Oriental y el P., América Latina y el C., Oriente Medio y África del N.

- **Comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de esta lección. Respecto a la actividad 1, discutan las ventajas y desventajas de cada representación; en cuanto a la 2, comenten las ventajas de analizar los datos de todo el periodo en lugar de examinar sólo los de algún año en particular. Al finalizar, lean la siguiente información y contrástenla con el análisis que ustedes efectuaron.**

Al analizar los resultados de una investigación es importante no omitir datos relevantes; por ejemplo, en la actividad anterior no basta analizar únicamente los datos de 1980 o 2001, ya que esto pueden inducir a conclusiones erróneas o incompletas; en cambio, los datos de todo el periodo proporcionan una mejor idea de cómo ha aumentado el porcentaje de alumnos en cada región.

También es importante la manera en que se expone la información; por ejemplo, las cuatro representaciones de la actividad 1 presentan información verdadera, pero cada una resalta cosas distintas: la gráfica circular muestra el porcentaje de personas que prefieren a cada superhéroe, mientras que la tabla, sólo la cantidad de votos que obtuvo cada uno.

En contexto

Nosotros luchamos por conseguir que un día no se mida a las naciones por su poder militar o económico ni por el esplendor de sus capitales ni los edificios públicos, sino por el bienestar de sus niños y niñas.

UNICEF, *Progreso para la infancia*, vol. 1, "Un informe sobre la supervivencia de la niñez", 2004.

Secuencia 7 / lección 25

Comunicación de resultados

CONTENIDO

Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

1. Considera la pregunta a) del cuestionario en la lección "Preguntas adecuadas y no tan adecuadas". Supón que se quieren conocer las estaturas para un estudio acerca del crecimiento de los adolescentes en México.

a) Escribe en tu cuaderno si estás de acuerdo con cada frase y explica por qué. R. P.

» Si se miden a estudiantes, conviene también medir a los profesores para tener una población más grande.
» Es importante medir a adolescentes de distintas edades, por ejemplo, alumnos de los tres grados de secundaria.
» No conviene medir a adolescentes de distintas edades porque alguien de 12 años de edad puede ser mucho más alto que un alumno de 14, y eso puede generar datos confusos o falsos. Es mejor medir a un grupo de niños de 10 años de edad varias veces durante cuatro años.
» Es importante medir a jóvenes de un solo estrato social; por ejemplo, de nivel socioeconómico medio.
» Es importante medir a adolescentes de entornos en los que hay desnutrición, y en los que no la hay.

b) El entorno socioeconómico al cual pertenecen los adolescentes que se miden también influye en los resultados. Responde en tu cuaderno lo siguiente.

» Menciona tres lugares en los que te convendría medir las estaturas para saber si los adolescentes han tenido un crecimiento adecuado o no.
» Menciona tres lugares en los que te convendría medir las estaturas para saber si hay desnutrición entre la población adolescente.

2. Irene y Julián son periodistas. Ella considera que si un alumno no tiene buenos resultados en la escuela es porque es flojo; Julián quiere demostrar que una escuela imparte una buena formación a sus alumnos sin necesidad de dejar tareas. Los dos han entrevistado a varios estudiantes; entre otros aspectos, les han preguntado cuántas horas al día estudian, sin contar el tiempo en clase.

a) Explica qué tipo de estudiantes le conviene entrevistar a cada uno (con excelente desempeño o con distintos niveles de rendimiento; de una misma escuela o de distintas; de lugares elegidos aleatoriamente o con base en algún criterio; etcétera).

R. P.

✷ Comenta tus resultados de las actividades 1 y 2 con tus compañeros. Después lean la siguiente información.

Los resultados que se obtienen en una encuesta o estudio están estrechamente relacionados con el tamaño (cantidad de personas) y las características de la población que se entrevista o toma como muestra. Por eso, para que un estudio sea confiable, es importante elegir adecuadamente la población.

comunicar

3. Trabaja en equipo. Hagan un estudio mediante un cuestionario corto. Éste puede tener una sola pregunta.

Tarea 1. Discutan qué problema les gustaría investigar o qué información les interesaría conocer. Ésta puede ser acerca del grupo, la escuela o la comunidad. Describan brevemente el problema en su cuaderno.

Tarea 2. Redacten la(s) pregunta(s) de su cuestionario.

R. P.

Tarea 3. Anoten a cuántas y a qué personas aplicarán el cuestionario.

R. P.

- Informen a todos sus compañeros lo que acordaron para las tareas 1, 2 y 3. Comenten los proyectos en grupo; propongan mejoras y hagan las modificaciones necesarias. Cuando estén de acuerdo, continúen con las siguientes tareas. Éstas les llevarán varios días, así que pónganse de acuerdo con el profesor sobre las fechas en que presentarán sus resultados.

Tarea 4. Organícense en el equipo para recabar la información necesaria.

Tarea 5. Organicen la información recabada en tablas y gráficas (del tipo que consideren pertinente).

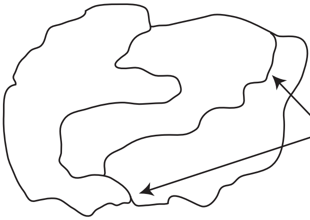
Tarea 6. Expongan frente al grupo los resultados a los que hayan llegado.

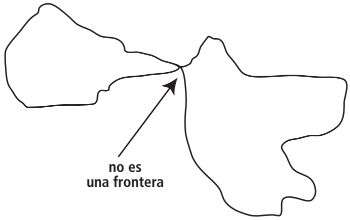
- Discutan acerca de los proyectos presentados. Hagan, entre todos, un periódico mural para comunicar los resultados.

Los mapas[1]

¿Cuál es el menor número de colores con el que se puede colorear el mapa de la República Mexicana, teniendo en cuenta que dos estados que comparten frontera no deben colorearse del mismo color? Averígualo; colorea el mapa de abajo y muestra tu solución a algún compañero.

Recuerda: se considera que dos estados comparten frontera cuando tienen una línea común, no cuando únicamente coinciden en un punto.







El mínimo son cuatro colores.

¿Cuántos colores usaste para colorear el mapa? ¿Esa será la mínima cantidad necesaria?

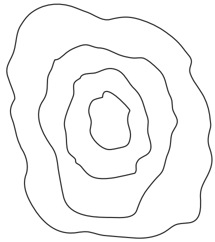
En 1852 un estudiante inglés, Francis Guthrie, notó, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, que bastaban cuatro colores para que las regiones con frontera común tuvieran colores diferentes. Al intuir que su descubrimiento podía aplicarse a cualquier mapa, se lo contó a su antiguo profesor de matemáticas, Augustus de Morgan. Desde entonces, el problema de los cuatro colores se convirtió formalmente en un problema matemático que muchas personas (matemáticos y no) intentaron resolver.

[1]Información adaptada de redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/mate1o.htm

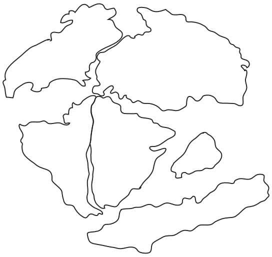
¿Algunos mapas se podrían colorear con menos de cuatro colores si se considera el problema anteriormente descrito? Inténtalo con las siguientes superficies divididas.



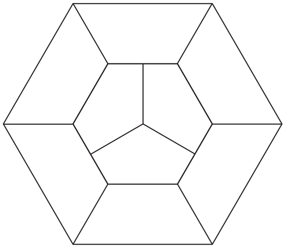
Número de colores: tres



Número de colores: dos



Número de colores: dos



Número de colores: cuatro

En un principio, varias personas creyeron haber resuelto el problema y, aunque las soluciones tenían errores o estaban incompletas, su trabajo permitió demostrar dos cosas fundamentales:

- » tres colores son insuficientes para colorear cualquier mapa, es decir, existen mapas que no se pueden colorear con sólo tres colores si se pretende respetar la regla concerniente a las fronteras;
- » cinco colores son suficientes para colorear cualquier mapa, es decir, no existe un mapa que requiera más de cinco colores para colorearlo según la regla ya referida.

Como cinco colores bastaban para colorear un mapa adecuadamente, pero tres eran insuficientes, el número cuatro era el candidato ideal… Había entonces que probar o refutar la teoría.

Fue hasta 1976 (¡124 años después de que se propuso el problema!) que Kenneth Appel y Wolfgang Haken, ambos de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, en Estados Unidos de América, demostraron que cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa. A partir de entonces, el problema de los cuatro colores se convirtió en el teorema de los cuatro colores. Así acaba esta historia, pues hasta ahora nadie ha refutado dicha demostración.

Selecciona la opción correcta.

1. Si la expresión $\frac{(n-3)n}{2}$ permite calcular el número de diagonales de un polígono regular de n lados, ¿cuántos lados tiene un polígono regular con 119 diagonales?

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18

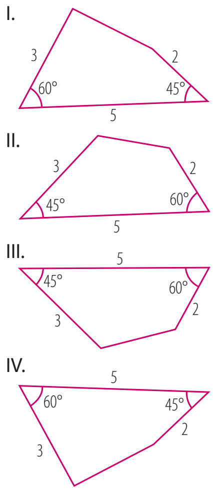
2. ¿Qué afirmación es falsa?

a) Dos figuras semejantes tienen ángulos correspondientes iguales.

b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

c) Todos los triángulos rectángulos son semejantes entre sí.

d) Todos los cuadrados son semejantes entre sí.



3. Observa las figuras de la izquierda. ¿Cuáles son polígonos congruentes?

a) I y IV b) I y II c) I y III d) II y IV

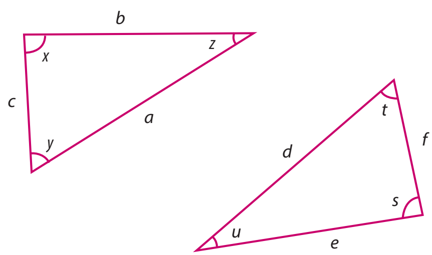
4. ¿En qué inciso se muestran condiciones suficientes para que los triángulos ABC y DEF sean congruentes?

a) $c = f, \quad b = e, \quad z = u$

b) $x = s, \quad y = t, \quad z = u$

c) $c = f, \quad b = e, \quad x = s$

d) $a = b, \quad e = f, \quad u = y$



x	y
1.5	91.5
2.0	122
2.5	152.5

5. ¿A qué relación (x, y) corresponde la tabla de la izquierda?

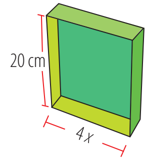
a) La cantidad de días (y) que tardan x obreros en construir un edificio.

b) La distancia que recorre un tren (y) durante un tiempo x a velocidad constante.

c) El área de un cuadrado (y) cuyo lado mide x unidades.

d) El gasto en gasolina (y) de un coche en el que viajan x personas.

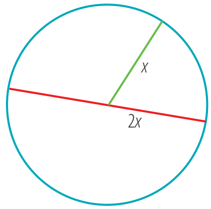
6. Un fabricante de cereal planea vender su producto en cajas como la de la derecha, en la que el largo mide cuatro veces el ancho, y la altura, 20 cm. Si x representa el ancho de la caja, ¿qué expresión permite calcular el volumen?



a) $V = 4x^2$ b) $V = 8x^2$

c) $V = 20x^2$ d) $V = 80x^2$

7. ¿Qué expresión permite calcular el área (y) del siguiente círculo?



a) $y = 3x^2$ b) $y = 2\pi x^2$

c) $y = \pi x^2$ d) $y = (3\pi x)^2$

8. ¿En qué inciso se expresan dos eventos, J y K, complementarios respecto al lanzamiento de un dado?

a) Evento J = cae 5 o 6. Evento K = cae un número menor que 5.

b) Evento J = cae un número non. Evento K = cae un número mayor que 2.

c) Evento J = cae 4. Evento K = cae 6.

d) Evento J = cae un número mayor que 3. Evento K = cae un número menor que 3.

9. Se ha lanzado una moneda dos veces. ¿Qué afirmación es verdadera?

a) Si en el primer volado cayó sol, es más probable que caiga águila en el segundo.

b) Si en el primer volado cayó sol, es menos probable que caiga sol en el segundo.

c) Si en el primer volado cayó águila, casi es seguro que en el segundo caiga sol.

d) El hecho de que en el primer volado cayera águila no influye en el resultado del segundo.

10. En un cine se le preguntó a los primeros 10 clientes del día su opinión acerca del servicio y la calidad de las películas exhibidas. ¿Por qué los resultados de la encuesta son poco confiables?

a) Porque no se preguntó acerca de la película favorita.

b) Porque se preguntó a pocos clientes.

c) Porque la encuesta tenía sólo dos preguntas.

d) Porque no se preguntó a todos los clientes.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

¿Niña o niño?



Nuestro ADN está organizado en cromosomas, que determinan muchos rasgos del ser humano: hay dos cromosomas en particular, llamados X y Y, que determinan el sexo de un bebé. Las mujeres tienen dos cromosomas X, y durante la fecundación transmiten al embrión uno u otro con la misma probabilidad. Los hombres, por su parte, tienen un cromosoma X y uno Y, y también aportan uno u otro con la misma probabilidad. El resultado es una pareja de cromosomas, que podrá ser XX o XY. Si el producto es XX, el embrión será una niña; si es XY, un niño.

Pregunta 1. Al momento de la fecundación, ¿cuál es la probabilidad de que el embrión sea niña? ¿Y de que sea niño? ¿Son eventos con la misma probabilidad?

R. T. La probabilidad de que sea niña es de $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea niño es de $\frac{1}{2}$. Son eventos con la misma probabilidad.

Pregunta 2. ¿Los eventos "niña" y "niño" son independientes?, ¿son mutuamente excluyentes? Justifica tu respuesta.

Sí son independientes y mutuamente excluyentes.

Pregunta 3. Si una pareja tuvo un primer hijo varón, ¿qué probabilidad hay de que su próximo hijo también sea varón?

a) 1 b) Más de $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) Menos de $\frac{1}{2}$

Pregunta 4. Cuenta el número de mujeres que hay en tu escuela. ¿La frecuencia relativa es 50%? Si no es así, ¿a qué atribuyes la diferencia?

R. P.

Pregunta 5. ¿Dónde es más probable que los nacimientos de niñas sean cercanos a 50%, en una comunidad pequeña o en una grande?

a) En una comunidad pequeña. b) En una comunidad grande. c) En ambas es igual de probable. d) No puede saberse.

sm

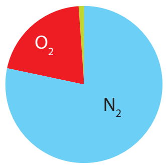
Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

El aire que respiramos

En la capa más baja de la atmósfera, la troposfera, hay condiciones adecuadas para el desarrollo de la vida. En esta zona se encuentran las nubes y casi todo el vapor de agua, y la composición del aire es aproximadamente de cuatro partes de nitrógeno por una de oxígeno. Exceptuando el N_2 y el O_2, el resto de los gases constituye una parte mínima del aire.

Composición química del aire (volumen ocupado)



Pregunta 1. En la gráfica circular se muestra el porcentaje del volumen que ocupa cada gas en el aire. Utilízala para completar la tabla de la derecha.

Gas	Porcentaje
nitrógeno	78%
oxígeno	21%
otros	1%

R. T. Los valores deben estar alrededor de los que se indican.

Pregunta 2. En una habitación pequeña caben 12 000 l de aire. ¿Cuántos litros corresponden a cada gas?

R. T. Se consideró los valores indicados en la tabla.
Nitrógeno 9360 l
Oxígeno 2520 l
Otros 120 l

Pregunta 3. Uno de los gases comprendidos en el área verde de la gráfica circular es el dióxido de carbono (CO_2), cuyo porcentaje en el aire es aproximadamente 0.04%. ¿Por qué no se incluyó en la gráfica la parte correspondiente a este gas?

R. T. Porque no se apreciaría la sección que le corresponde.

Pregunta 4. ¿Por qué una gráfica de barras no resulta adecuada para representar estos datos?

R. T. La proporción de cada gas se aprecia mejor en una gráfica circular.

Pregunta 5. ¿Qué expresión algebraica muestra la proporción entre las cantidades de oxígeno (o) y nitrógeno (n) en el aire?

a) $o = 4n$ b) $o = 5n$ c) $n = 4o$ d) $n = 5o$

Autoevaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas.				
Trazo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades.				
Identifico las propiedades de las figuras congruentes o semejantes.				
Uso los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.				
Interpreto representaciones gráficas, tabulares y algebraicas, que corresponden a una misma situación.				
Identifico las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que corresponden a una relación de proporcionalidad.				
Represento relaciones de variación cuadrática por medio de tablas y expresiones algebraicas.				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Identifico las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.				
Explico la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.				
Diseño una encuesta o un experimento y represento los resultados.				
Identifico la población de estudio en una encuesta o un experimento. Interpreto los datos de una muestra.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas				

Para concluir tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

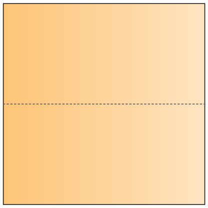
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades? ¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________________

Y para terminar...

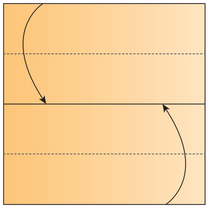
Hagamos un cubo con papiroflexia

Necesitas seis cuadrados de papel de colores. En cada uno haz los siguientes dobleces.

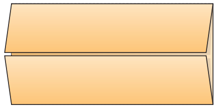
1. Marca con un doblez una línea que divida el cuadrado a la mitad.



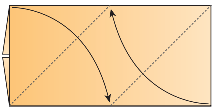
2. En cada mitad haz otro doblez y lleva los dos lados hacia el primer doblez en forma horizontal, como se indica.



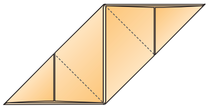
3. Obtendrás una figura como la siguiente.



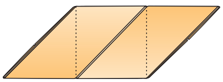
4. Voltea la figura y haz dos dobleces diagonales, uno ascendente y otro descendente, como los siguientes.



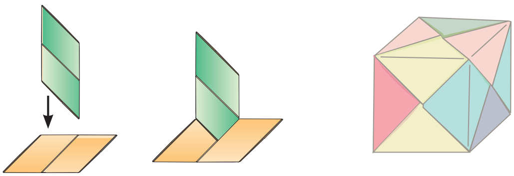
5. Obtendrás la siguiente figura. Ahora marca dos dobleces más donde indican las líneas punteadas.



6. Voltea una vez más la figura y verás la siguiente forma.



7. Con ayuda de las aberturas de cada figura, producidas por los dobleces hechos, ensambla las seis unidades, como se muestra.



1. ¿Cómo se llama el cuadrilátero que se obtiene en el paso 6? Paralelogramo (o romboide).
2. ¿Cuánto miden sus ángulos? 45 y 135 grados
3. ¿Qué parte del área del cuadrado inicial es el área de la figura del paso 6? La cuarta parte.
4. ¿Qué parte del área del cuadrado inicial es el área de cada una de las caras del cubo? La octava parte.



BLOQUE 2

Aprendizajes esperados

- ✓ Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- ✓ Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.



La simetría en la arquitectura

Anish Kapoor es un escultor que se caracteriza por utilizar formas geométricas y simetrías en sus obras. Observa esta espectacular escultura suya: además de ser una figura impactante, refleja los edificios de la ciudad de formas sorprendentes al pasar bajo ella.

1. Investiga acerca de este escultor y selecciona sus dos trabajos más geométricos y los dos que más te gusten.
2. La imagen tiene simetrías. Localiza al menos dos.
3. Busca imágenes de los siguientes seres vivos e identifica en ellos las simetrías que presenta su aspecto exterior: medusa, helecho, oso panda, mariposa, nopal.
4. Haz una lista de al menos cinco edificios u obras públicas de tu ciudad que tengan un alto grado de simetría. Compara tu lista con las de tus compañeros. Elijan, por votación, las tres obras con mayor simetría.
5. Ve, en la imagen, lo limpias que están la plaza y la escultura. ¿Qué harías para que la plaza de tu ciudad o poblado se mantuviera así?

El Premio Pritzker de arquitectura es el reconocimiento más importante que se puede obtener en ese campo. En 1980 fue otorgado al arquitecto mexicano Luis Barragán Morfín. Si quieres conocer más sobre su vida y obra, entra a

www.barragan-foundation.org/flash_english/1menu.html

Como ves, la simetría aparece con frecuencia en la naturaleza, así como en muchas creaciones del ser humano.

En este bloque conocerás las propiedades más importantes de la simetría y otras transformaciones geométricas, y usarás esos conocimientos para obtener figuras nuevas a partir de otras.

BLOQUE 2

Secuencia 1 / lección 26

La técnica de factorización I

CONTENIDO: Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

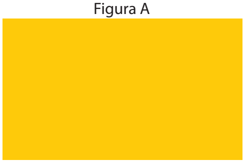
El ensayo y error es un procedimiento útil para resolver algunas ecuaciones de segundo grado; sin embargo, es necesario conocer otros procedimientos para encontrar más rápido la solución. En esta secuencia conocerás uno de ellos.

Una pista

Descompón en factores primos el área (84 cm²) y busca, entre esos factores, las medidas del ancho y el largo.

1. Trabaja en equipo. La figura **A** es un rectángulo. Usen las medidas indicadas abajo para averiguar cuánto mide cada lado. Verifiquen que el área sea 84 cm^2 y el perímetro, 38 cm.

Figura A



Perímetro = 38 cm

Área = 84 cm^2

Largo = 12 cm

Ancho = 7 cm

- Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.

  a) Revisen los resultados que obtuvieron y determinen cuáles son correctos.

  b) Comenten los procedimientos que usaron para resolver la actividad y mencionen por medio de cuáles consiguieron el resultado correcto.

2. Lee cada paso del razonamiento que aparece en la tabla para encontrar las medidas de los lados de la figura **A**. Completa la tabla en equipo y respondan las preguntas en su cuaderno.

Razonamiento	Explicar por qué
Paso 1. Si el perímetro del rectángulo mide 38 cm, entonces el largo más el ancho miden 19 cm.	R. P.
Paso 2. Si el largo más el ancho miden 19 cm, esas medidas se pueden representar así: ancho = x, largo = $19 - x$.	
Paso 3. Si el ancho mide x y el largo, $19 - x$, el área se puede expresar así: $x(19 - x) = 84$.	
Paso 4. Se pueden encontrar las medidas buscadas mediante un cálculo simple: si $x = 1$, el área vale $1(18) = 18$; si $x = 2$, el área vale $2(17) = 34$.	

comunicar

a) ¿Cuánto miden, según el razonamiento de la tabla, el ancho y el largo del rectángulo?
7 cm y 12 cm

b) Expliquen por qué, si representamos el largo de la figura con x, el ancho es $19 - x$.
R. T. Se puede despejar el ancho de la ecuación: ancho + x = 19

c) El primer miembro de la ecuación $x(19 - x) = 84$ es el producto de dos factores que, en este caso, representan las medidas de un rectángulo (ancho y largo); el segundo corresponde al resultado de la multiplicación y, en este caso, representa el área del rectángulo. En la siguiente tabla se muestran otras formas de representar la misma ecuación. Complétala.

Ecuación	¿Qué se hizo?
$19x - x^2 = 84$	R. T. Se multiplicó x por 19 y por x
$19x - x^2 - 84 = 0$	Se restó 84 en ambos miembros de la ecuación
$x^2 - 19x + 84 = 0$	Se multiplicó ambos miembros por (–1)

d) ¿Cuánto miden el largo, el ancho y el perímetro de otro rectángulo si se sabe que su área se expresa mediante la ecuación $x(x + 4) = 45$?

Largo: 9 cm   Ancho: 5 cm   Perímetro: 28 cm

3. El área de un rectángulo se expresa mediante la ecuación $x^2 + 8x = 105$.

a) Rescribe la ecuación como un producto de dos factores igual al área: $x(x + 8) = 105$

b) De acuerdo con la ecuación que escribiste en el inciso anterior, ¿cómo se relacionan el largo y el ancho del rectángulo? R. T. El largo es 8 cm mayor que el ancho.

c) Resuelve la ecuación y anota las medidas del rectángulo.

Ancho: 7 cm   Largo: 15 cm

✷ Analiza, con el grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información.

Factorizar significa escribir un número o una expresión algebraica como un producto de dos o más factores. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 8x = 105$, el miembro izquierdo puede factorizarse como $x(x + 8)$, pues al desarrollar ese producto se obtiene como resultado $x^2 + 8x$. La nueva ecuación, $x(x + 8) = 105$, es equivalente a la primera y, por tanto, tiene las mismas soluciones.

técnicas

4. Factoriza, en equipo y en tu cuaderno, las ecuaciones. Encuentren, por ensayo y error, las soluciones.

a) $x^2 - 16x + 63 = 0$ $x(x - 16) = -63$; 7 y 9
b) $x^2 + 9x + 20 = 0$ $x(x + 9) = -20$; –4 y –5
c) $x^2 - 9x + 14 = 0$ $x(x - 9) = -14$; 2 y 7
d) $x^2 + 5x - 14 = 0$ $x(x + 5) = 14$; 2 y –7

✷ Compara, con ayuda del profesor, tus soluciones con las del grupo y verifiquen que sean correctas.

Secuencia 1 / lección 27

La técnica de factorización II

CONTENIDO
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

1. Trabaja en equipo. Consideren lo siguiente.

Javier piensa un número → Lo eleva al cuadrado → Después le suma el doble del número que pensó → Al resultado de la suma le resta 15 → ¡Y obtiene cero!

¿Qué número pensó Javier? 3 o –5

Comparen su resultado con el de sus compañeros; comenten cómo lo encontraron. Después, con ayuda del profesor, trabajen la siguiente actividad.

2. Si x representa el número que pensó Javier…

a) ¿Cómo se expresaría en una ecuación lo que hizo? R. T. $x^2 + 2x - 15 = 0$

b) La ecuación anterior se reescribe en forma factorizada como $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Averigüen cómo, a partir de una, se puede hallar la otra.

3. Trabaja en equipo. Analicen la siguiente ecuación y respondan.

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

a) En la ecuación hay un producto de dos factores que es igual a 0. ¿Qué factores son?

$x + 5$ y $x - 3$

b) Los dos factores están formados por un término común y dos términos que no son comunes. ¿Cuál es el término común? x ¿Y los no comunes? +5 y –3

c) Aunque no lo parezca, la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$ es una ecuación de segundo grado.

Averigüen y expliquen por qué. R. T. Al desarrollar el producto se obtiene una ecuación de segundo grado.

d) Si el producto de dos factores es igual a 0, ¿qué dirían de esos factores? Subrayen la respuesta correcta.

» Que si uno de ellos vale n, el otro vale $-n$.
» Que si uno de ellos vale n, el otro vale $\frac{1}{n}$.
» Que al menos uno de ellos vale 0.

e) A partir de la respuesta anterior, ¿qué deducirían de los factores que integran la expresión

$(x + 5)(x - 3) = 0$? R. T. Las soluciones son –5 y +3

- Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, las respuestas de la actividad anterior. En particular, comenten cómo justificaron que la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$ es una ecuación de segundo grado.

4. Considera que en la ecuación de segundo grado $(x + 5)(x - 3) = 0$ sucede que $x + 5 = 0$, o bien, que $x - 3 = 0$.

a) Si $x + 5 = 0$, ¿cuál es el valor de x? -5 Si $x - 3 = 0$, ¿cuál es el valor de x? 3

b) De acuerdo con lo anterior, ¿en qué números pudo pensar Javier? 3 o -5

5. Completa la tabla.

Forma general	Forma factorizada	Soluciones
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$(x + 1)(x + 5) = 0$	$x_1 = -1$ $x_2 = -5$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x + 2)(x + 3) = 0$	$x_1 = -2$ $x_2 = -3$
$x^2 - x - 6 = 0$	$(x + 2)(x - 3) = 0$	$x_1 = -2$ $x_2 = 3$
$x^2 + x - 6 = 0$	$(x - 2)(x + 3) = 0$	$x_1 = 2$ $x_2 = -3$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$(x - 2)(x - 3) = 0$	$x_1 = 2$ $x_2 = 3$
$x^2 + (s + t)x + st = 0$	$(x + s)(x + t) = 0$	$x_1 = -s$ $x_2 = -t$

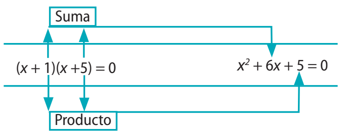
6. Lleva a cabo, en equipo, lo siguiente.

a) Comparen sus respuestas de la actividad anterior.

b) Verifiquen que la expresión factorizada $(x + s)(x + t) = 0$ corresponda a la forma general $x^2 + (s + t)x + st = 0$.

c) Adviertan que, en la forma general anterior, el número que multiplica a x es la suma $s + t$, y el tercer término es el producto st.

d) Verifiquen que ocurra lo mismo con todas las ecuaciones de la tabla anterior. Por ejemplo, en la primera sucede que…



7. Trabaja con un compañero. Usen el procedimiento anterior para convertir la forma general de cada ecuación de la tabla siguiente en la forma factorizada.

técnicas

Forma general	Forma factorizada	Soluciones
$x^2 + 7x + 12 = 0$	$(x + 4)(x + 3) = 0$	$x_1 = -4$, $x_2 = -3$
$x^2 + 8x + 15 = 0$	$(x + 3)(x + 5) = 0$	$x_1 = -3$, $x_2 = -5$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x + 2)(x + 3) = 0$	$x_1 = -2$, $x_2 = -3$
$x^2 + 14x + 45 = 0$	$(x + 9)(x + 5) = 0$	$x_1 = -9$, $x_2 = -5$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x + 3)(x + 1) = 0$	$x_1 = -3$, $x_2 = -1$

- Comparen sus resultados con los del resto del grupo y corrijan sus errores. Verifiquen que, en todas las formas factorizadas, la suma de ambos números corresponda al coeficiente de x y el producto de ambos números, al término independiente de la ecuación.

Reflexionamos

¿Cuál es la forma factorizada de $x^2 + 6x = 0$? ¿Cuáles son los números que se buscan? ¿Cuáles son los números que se buscan en la ecuación $x^2 = 0$?

BLOQUE 2

Secuencia 1 / lección 28

La técnica de factorización III

CONTENIDO: Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

1. Haz, en equipo, lo que se indica.

a) Inventen dos ecuaciones de segundo grado expresadas como producto de dos factores y anótenlas.

» Ecuación 1: R. P. Ecuación 2: ______

b) Escriban, junto a cada ecuación que inventaron, la misma en la forma general.

validar

c) Verifiquen que las soluciones de cada caso sean los opuestos de los números de los factores. Por ejemplo, en la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$, las soluciones son $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$.

- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Corrijan lo que sea necesario.

2. Completen la tabla.

Forma general	Forma factorizada	¿Cómo son los números buscados?
$x^2 - x - 2 = 0$	$(x + 1)(x - 2) = 0$	Sumados dan −1, multiplicados dan −2.
$x^2 + 7x + 10 = 0$	$(x + 2)(x + 5) = 0$	Sumados dan 7, multiplicados dan 10.
$x^2 + x - 12 = 0$	$(x + 4)(x - 3) = 0$	Sumados dan 1, multiplicados dan 12.
$x^2 + 2x - 3 = 0$	$(x + 3)(x - 1) = 0$	Sumados dan 2, multiplicados dan −3.
$x^2 - 7x + 12 = 0$	$(x - 5)(x - 2) = 0$	Sumados dan −7, multiplicados dan 12.

Convivimos

Elabora un formulario propio con técnicas para factorizar. Compáralo con el de algunos compañeros y complementen lo necesario. Expliquen, con sus palabras, en qué consiste cada técnica y cómo ayuda a resolver ecuaciones de segundo grado.

3. Trabajen en su cuaderno. Factoricen cada ecuación y encuentren sus raíces (soluciones).

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $(x - 2)(x - 1) = 0$ 2 y 1

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x - 1)(x - 1) = 0$ 1

c) $x^2 - x - 12 = 0$ $(x - 4)(x + 3) = 0$ 4 y −3

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $(x - 3)(x - 3) = 0$ 3

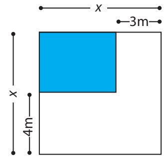
Reflexionamos

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$? ¿Y las de la ecuación $x^2 + 0.3x + 0.2 = 0$?

- Con ayuda del profesor, comparen sus respuestas a las actividades 2 y 3 con las del grupo. Si algunas no coinciden, detecten errores y corrijan lo necesario. Al finalizar, de manera grupal redacten un método para factorizar ecuaciones como las anteriores (del tipo $x^2 + Bx + C = 0$)

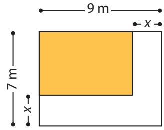
4. Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

a) El dibujo representa el piso de una sala de espera cuadrada. El área cubierta por el tapete azul es de 6 m^2.



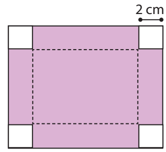
¿Cuánto mide el lado de la sala de espera? 6 m

b) Liliana colocará 35 m^2 de mosaico en el piso de su patio que mide 9 m × 7 m. Como el mosaico no alcanza para cubrir todo el piso, dejará un pasillo de ancho uniforme, como muestra la figura.



¿Cuál será el ancho del pasillo? 2 m

c) En cada esquina de una pieza rectangular que mide 7 cm más de largo que de ancho, se cortó un cuadrado de 2 cm de lado para armar una caja sin tapa.



Si el volumen de la caja es 120 cm^3, ¿cuáles son sus medidas? La pieza mide 9 cm de ancho y 16 cm de largo.

5. Consideren la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$, en la que el coeficiente de x^2 no es 1. Analicen, a partir de las preguntas planteadas, si es posible resolverla mediante factorización. Escriban las respuestas en su cuaderno.

a) Si a partir de la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$ se obtuvo la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, ¿qué fue lo que se hizo? R. T. Se dividieron ambos lados de la ecuación entre 4.

b) Para resolver la ecuación se requieren dos números que sumados den –3 y multiplicados, $\frac{9}{4}$. ¿Cuáles son esos números? $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$

c) Factoricen la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$. $(x - \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$

d) ¿Cuáles son entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$? $x = \frac{3}{2}$

e) Verifiquen que las soluciones también satisfagan la ecuación original ($4x^2 - 12x + 9 = 0$).

6. Usen el procedimiento anterior para resolver las siguientes ecuaciones en su cuaderno.

a) $4t^2 + 9t + 5 = 0$ –1.25 y –1

b) $8m^2 + 18m + 9 = 0$ –1.5 y –0.75

c) $6n^2 - 13n + 6 = 0$ $\frac{2}{3}$ y 1.5

d) $15x^2 + 4x - 3 = 0$ –0.6 y $\frac{1}{3}$

✹ **Con ayuda del profesor, analicen sus respuestas a las actividades 4, 5 y 6 y corrijan lo necesario. En el caso de los problemas analicen si tienen una o dos respuestas y por qué. Después lean la información y compárenla con el método que usaron.**

Cuando en una ecuación de segundo grado el coeficiente del término cuadrático (x^2) es un número distinto de 1, es posible dividir todos los términos de la ecuación entre ese coeficiente y buscar una factorización para la nueva ecuación (que es equivalente a la original y, por tanto, tiene las mismas soluciones).

conect@mos

Practica la factorización de ecuaciones en

www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiego-gaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/polinomios/factorizacion/factorizacion01.htm

Escribe en los recuadros los factores faltantes y haz clic en el botón correspondiente para verificar tus respuestas. Al terminar, comenta con un compañero qué dificultades tuviste al resolver la actividad.

BLOQUE 2

Secuencia 2 / lección 29

Trasladar figuras

CONTENIDO

Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

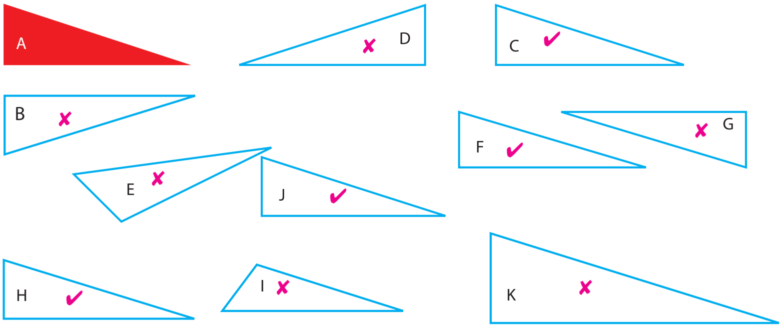
La traslación y la rotación de una figura son transformaciones en el plano que se estudian desde el punto de vista matemático. ¿Qué características tienen? Esto es lo que estudiarás en esta secuencia.

resolver

1. La traslación de una figura se consigue moviéndola sobre el plano en una dirección.



a) Imagina que trasladas el triángulo rojo, es decir, que lo deslizas en una dirección, sin girarlo ni levantarlo del papel, y lo dejas en otro lugar.



b) Marca con una ✔ los triángulos que podrían ser el triángulo rojo que trasladaste, y con un ✘ aquellos que no. Puedes dibujar y recortar un triángulo similar al rojo y simular los deslizamientos.

2. El triángulo **A'B'C'** es producto de una traslación del triángulo **ABC.**

a) Traza los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

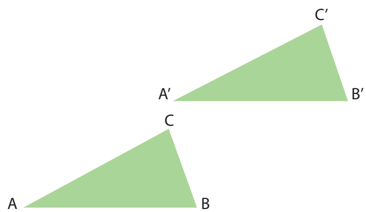
b) Subraya las afirmaciones que sean verdaderas respecto a los segmentos que trazaste.

» Son perpendiculares entre sí.

» Son paralelos entre sí.

» Los tres tienen la misma medida.

» Tienen diferente medida.



3. Trabaja en equipo. Sugieran, entre todos, un método para efectuar traslaciones de una figura geométrica usando regla y compás. Prueben el método propuesto haciendo algunas traslaciones.

validar

- Comenten, con el resto del grupo, el método que propusieron para efectuar traslaciones. Al finalizar, hagan lo siguiente.

  a) Acuerden, entre todos, un método común para trasladar una figura geométrica; escriban en su cuaderno las instrucciones.

  b) Tracen, en su cuaderno, tres figuras geométricas distintas; prueben las instrucciones que escribieron trazando la traslación de cada una. Háganlo de manera que los segmentos que unen vértices correspondientes midan 5 cm.

Reflexionamos

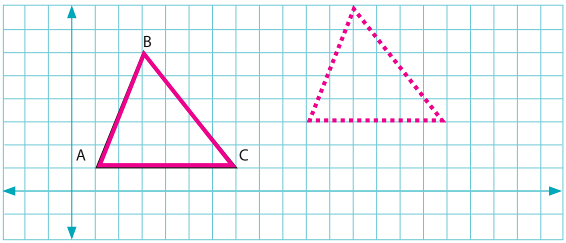
Al trasladar una figura, ¿cambia su forma?, ¿cambia su tamaño? Si trasladas una figura con lados paralelos y perpendiculares, ¿los mantiene? Si trasladas una figura con un ángulo de 60°, ¿lo conserva?

4. En el siguiente plano cartesiano se trasladará el triángulo **ABC** de manera que el vértice A' quede en las coordenadas (10, 3).

a) ¿Cuáles serán las coordenadas de **B'**? (12,8)

b) ¿Y las de **C'**? (16,3)

c) Traza el triángulo que resulta de la traslación.



- Compara tus resultados con los del resto del grupo. Respondan las preguntas en su cuaderno y coméntenlas.

  a) Si la figura **A'** es una traslación de la **A**, ¿es posible que **A'** sea de mayor tamaño que **A**? ¿Podría tener una forma distinta? No; no.
  b) Si se traslada una figura con lados paralelos, ¿se mantienen así en la figura trasladada? ¿Y si los lados son perpendiculares? Sí; sí.
  c) Si se traslada una figura con un ángulo de 60º, ¿se conserva el mismo en la figura trasladada? Sí
  d) Escriban, de manera grupal, el significado de *traslación* y resuman las propiedades que conserva una figura trasladada.

Reflexionamos

Compara las abscisas (*x*) del punto A con el A', del B con el B' y del C con el C'. ¿Tienen algo en común? ¿Qué sucede con las ordenadas (*y*)?

En matemáticas se dice que una figura es una traslación de otra si los segmentos que unen los puntos correspondientes de las dos figuras tienen la misma medida y son paralelos entre sí. La medida de cada segmento es llamada **magnitud de la traslación**.



BLOQUE 2

Secuencia 2 / lección 30

Rotar figuras

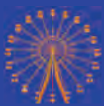
CONTENIDO

Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

En contexto

La idea de rotación se presenta en diversas situaciones cotidianas; por ejemplo, los siguientes objetos rotan: el minutero de un reloj, las canastillas de la rueda de la fortuna y la rueda de una bicicleta.







1. Haz lo que se indica.

a) Recorta, en papel transparente, un círculo del mismo tamaño que el de abajo.

b) Colócalo sobre esta hoja de manera que su centro coincida con el punto **C**.

c) Sujétalo de manera que gire en torno a su centro (usando, por ejemplo, la punta de un lápiz o de un alfiler).

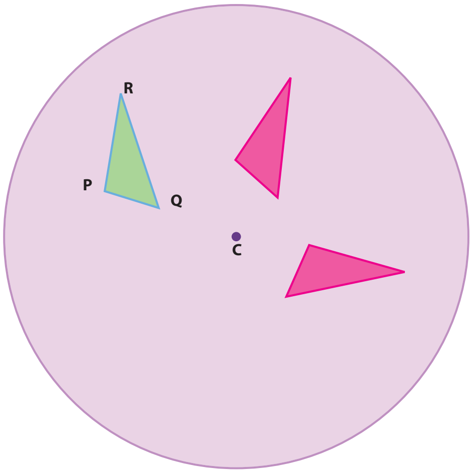
d) Calca en el círculo el triángulo **PQR**.

e) Gira el círculo, en el ángulo que desees, y remarca el triángulo en el lugar donde haya quedado para que se marque en la hoja del libro.

f) Quita el círculo y marca con lápiz el nuevo triángulo: has rotado el triángulo **PQR**. Anota **P'**, **Q'** y **R'** en los vértices respectivos.

g) Une el punto **C** con los puntos **P** y **P'**. Mide el ángulo **PCP'** y anota su medida.

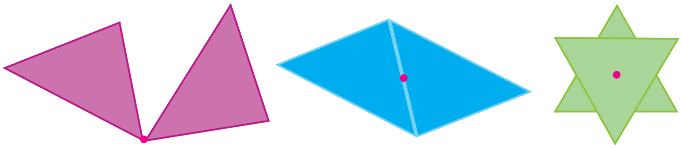
h) Haz dos o tres rotaciones más del triángulo. R. T.



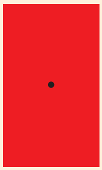
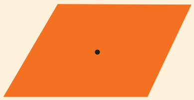
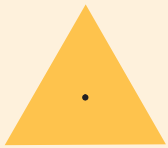
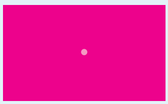
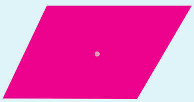
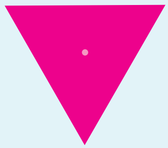
El ángulo que giraste para rotar el triángulo se llama **ángulo de rotación** y el punto **C** se denomina **centro de rotación**.
El centro de rotación puede estar fuera de la figura, ser uno de sus vértices o estar sobre alguno de sus lados o, incluso, dentro de la figura.

- Haz, con el grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.
  a) Tracen en su cuaderno un triángulo cualquiera **MNP**.
  b) Ubiquen un punto **C** fuera del triángulo. Este punto será el centro de rotación.
  c) Tracen otro triángulo que sea una rotación del **MNP** respecto al punto **C**; háganlo con un ángulo de rotación de 60°.

2. Encuentra el centro de rotación que transforma un triángulo en otro. Si es necesario, recorta figuras similares a las de abajo para que puedas manipularlas.



3. Considera que el punto marcado dentro de las figuras de la siguiente tabla es su centro de rotación, y que cada una girará según el ángulo indicado. Dibuja en la tercera fila cómo quedarán éstas después de girarlas.

Figura inicial			
Ángulo de rotación	90°	180°	180°
Figura final			

4. En la siguiente tabla hay algunas preguntas referidas a ciertas características de la rotación y la traslación de figuras. Anota Sí o No, según corresponda.

	Rotación	**Traslación**
¿Se conservan las medidas de los ángulos de la figura?	Sí	Sí
¿Se conservan las medidas de los lados de la figura?	Sí	Sí
¿Se conserva la forma de la figura?	Sí	Sí

- Compara tus resultados de las actividades 2, 3 y 4 con los de tus compañeros. Después redacten en su cuaderno un resumen sobre la traslación y la rotación; ilústrenlo con una figura a la que le apliquen una traslación y una rotación.

Una pista

Copia las figuras y recórtalas. Usa tu lápiz para fijar un centro de rotación en la figura y comprobar si, al rotarla, se obtiene la otra.

Reflexionamos

¿Qué figuras geométricas, al rotarlas 180° respecto a su centro, quedan en la misma posición?

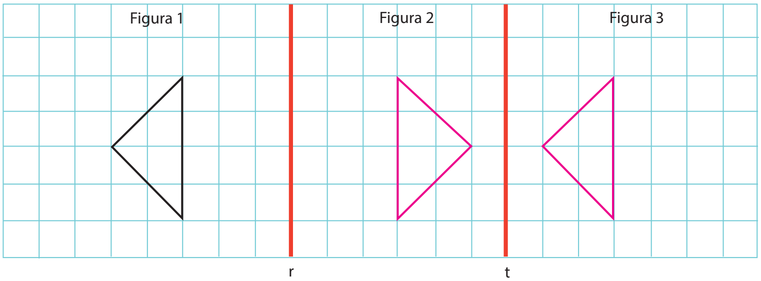
Secuencia 3 / lección 31

Transformaciones equivalentes

CONTENIDO
Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Ya has estudiado tres transformaciones en el plano: simetría respecto a un eje, traslación y rotación. ¿Puedes identificarlas en logotipos de empresas, mosaicos, azulejos o pinturas? En esta secuencia notarás que estas transformaciones tienen muchos usos en la vida real.

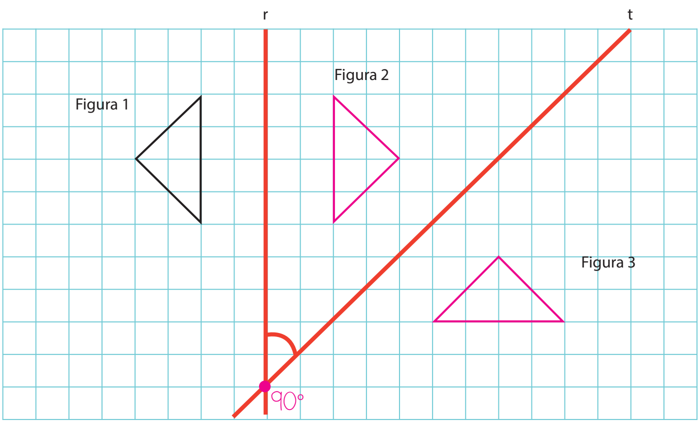
1. Traza la figura 2 simétrica a la figura 1 respecto a la recta **r**. Después traza la figura 3 simétrica a la figura 2 respecto a la recta **t**. Advierte que las rectas **r** y **t** son paralelas. Después responde en tu cuaderno.



a) ¿Qué transformación (rotación, traslación o simetría) permite obtener directamente la figura 3 a partir de la 1? Traslación.
b) Considera los lados de cada cuadrito como unidades de medida. ¿Qué distancia hay entre un vértice de la figura 1 y su correspondiente en la 3? 12 unidades.
c) ¿Qué distancia hay entre las paralelas **r** y **t**? 6 unidades.
d) ¿Cómo se relaciona la distancia entre **r** y **t** con la distancia entre un vértice de la figura 1 y su correspondiente en la 3? R. T. La distancia entre los vértices es el doble que la distancia entre las rectas.

resolver

2. Traza la figura 2 simétrica a la 1 respecto a la recta **r**, y la figura 3 simétrica a la 2 respecto a la recta **t**. Luego responde en tu cuaderno.



conect@mos

Practica la rotación y traslación de figuras en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/simetrias/simetria_rotacional/actividad.html

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, reúnete con un compañero; comparen y validen sus respuestas; y comenten qué dificultades encontraron.

a) Ten en cuenta que la figura 3 corresponde a una rotación de la 1. Encuentra el centro de rotación y márcalo; anota al lado de éste cuánto mide el ángulo de rotación.
b) ¿Cuánto mide el ángulo (marcado con rojo) entre las dos rectas? 45°
c) ¿Cómo se relacionan el ángulo de rotación y el ángulo entre las rectas?
R. T. El ángulo de rotación mide el doble

- Revisa, con el grupo, tus respuestas. Redacten, entre todos y con ayuda del profesor, un resumen titulado "Transformaciones equivalentes", que incluya las respuestas de las siguientes preguntas.
  - » ¿Qué transformación equivale a reflejar una figura dos veces respecto a dos rectas paralelas?
  - » ¿Qué transformación equivale a reflejar una figura dos veces respecto a dos rectas que se cortan?
  - » ¿Cuánto mide el ángulo de rotación si las dos rectas son perpendiculares?
  - » ¿En qué situación las rectas se cortan, pero no son perpendiculares?

Una pista

Considera que el ángulo de rotación tiene su vértice en el centro de rotación; uno de sus lados pasa por el vértice de la figura 1 y el otro, por el correspondiente en la 3.

conect@mos

Descarga la actividad de rotación y traslación de figuras en

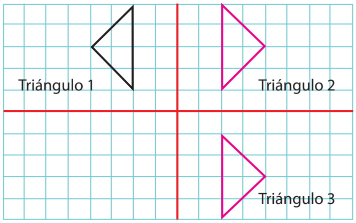
www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídenlas.

3. Traza el simétrico del triángulo 1 respecto al eje vertical para obtener el triángulo 2, y el simétrico del triángulo 2 respecto al eje horizontal para obtener el triángulo 3. Responde en tu cuaderno.

Considera que el triángulo 3 es una rotación del 1.

a) ¿Cuál es el centro de rotación? (0,0)
b) ¿Cuánto mide el ángulo de rotación? 180°
c) ¿Cuánto mide el ángulo entre las rectas?
90°

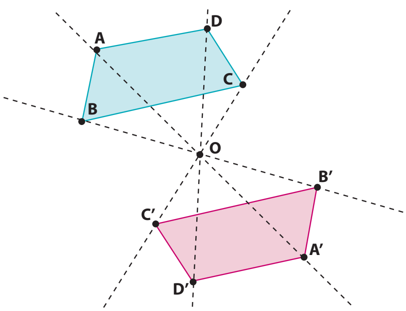


La rotación de 180° también se denomina **simetría central**. En este caso, el centro de rotación se llama **centro de simetría** y se dice que las figuras son simétricas respecto a este punto.

4. El cuadrilátero rojo es simétrico al azul respecto al punto **O**. Explica, en equipo, cómo se hizo el trazo. Después, reprodúzcanlo en su cuaderno.

comunicar

R. P.



- Con ayuda del profesor compara tus respuestas a las actividades 3 y 4 con las del grupo. Al finalizar busquen en el entorno figuras con simetría respecto a un punto.

BLOQUE 2

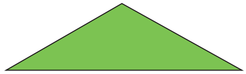
Secuencia 3 / lección 32

Figuras en movimiento

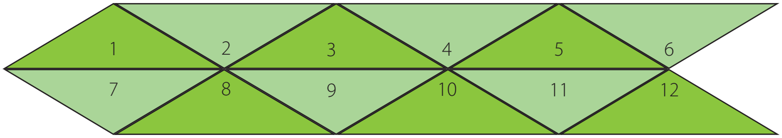
CONTENIDO: Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

resolver

1. Elabora en cartulina 12 triángulos isósceles como el siguiente. Los ángulos iguales miden 30º y el lado mayor, 5 cm. Reproduce los diseños que se muestran y contesta las preguntas.



a) En la flecha…



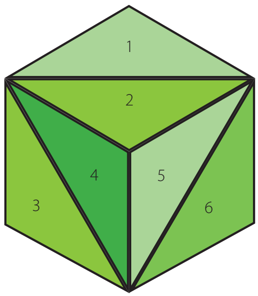
» ¿Qué triángulo es simétrico al 5 respecto al eje horizontal? el 11

» ¿Qué triángulos son traslaciones del 10? 1, 3, 5, 8 y 12

b) En el hexágono…

» Encuentra dos triángulos que se obtengan al aplicar una simetría al triángulo 3. 1, 4 y 6

» Halla dos triángulos que se obtengan al aplicar una rotación al triángulo 1. 2, 4 y 5



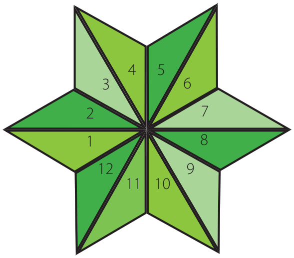
c) En la estrella…

» ¿Qué transformaciones se aplicaron al triángulo 1 para formarla?

Simetría, rotación y/o traslación.

» ¿Qué transformaciones harías para obtener el triángulo 7 a partir del 2? Simetría, rotación y/o traslación

» ¿Qué transformaciones harías para obtener el triángulo 7 a partir del 4? Simetría, rotación y/o traslación



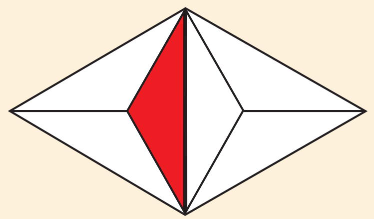
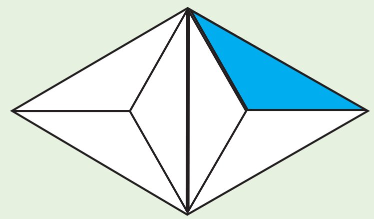
Reflexionamos

Los triángulos 2 y 9 en el inciso a) pueden obtenerse a partir de una rotación del triángulo 1. Para cada caso, ¿cuál es el centro de rotación?, ¿cuál es el ángulo de rotación?

✷ Compara tus respuestas con las del resto del grupo. Para cada transformación que hayan encontrado, especifiquen, según sea el caso, su eje (simetría axial), su centro y ángulo (rotación) o su magnitud (traslación).

sm

2. Colorea lo que se indica. R. P.

Dos triángulos que se obtienen al aplicar una simetría al triángulo rojo.	Dos triángulos que se obtienen al aplicar una rotación al triángulo azul.
	

3. Reproduce los siguientes diseños usando como molde los triángulos de cartulina que hiciste y dibújalos en tu cuaderno. R. P.

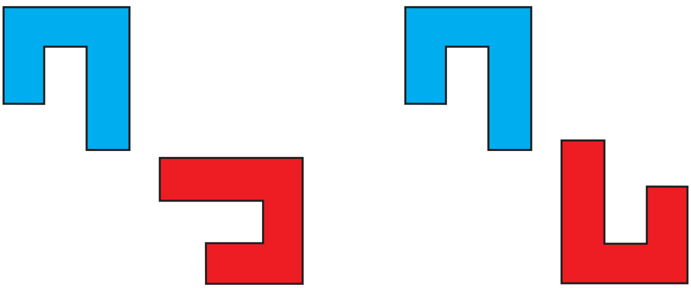
técnicas

a) Un diseño en el que haya seis traslaciones de un mismo triángulo
b) Un diseño en el que haya tres rotaciones de un mismo triángulo
c) Un diseño en el que haya dos triángulos simétricos respecto a un eje
d) Un diseño con cualquier número de triángulos en que utilices simetrías, rotaciones y traslaciones en conjunto

- Muestra a tus compañeros tus diseños. Expliquen, en cada caso, las simetrías, rotaciones y traslaciones que aplicaron.

4. Traza, en tu cuaderno y para cada caso, una figura como la azul y aplica las transformaciones necesarias para obtener la figura roja. Utiliza tu juego de geometría, y no olvides describir los pasos de cada construcción.

comunicar



Se hizo una rotación de 90° — Se hizo una simetría central

- Compara tus figuras con las de otros compañeros. Comenten, en equipos, las transformaciones que hicieron, especificando las características de cada una (ejes de simetría, centro y ángulo de rotación, magnitud de la traslación) y también si alguna de las figuras puede obtenerse de diferentes maneras, es decir, con transformaciones distintas.

conect@mos

Sigue practicando la rotación y traslación de figuras en

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Traslaciones_Simetrias_Giros/index.htm

Trabaja con un compañero. Lean la información que se presenta y resuelvan los ejercicios de la sección de aplicaciones. Al finalizar, comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las del grupo y valídenlas.

Secuencia 3 / lección 33

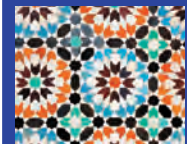
Diseños con transformaciones

CONTENIDO Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

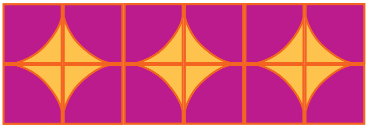
resolver

En contexto

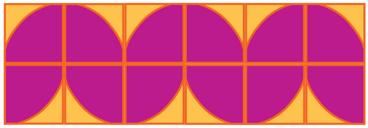
Las transformaciones geométricas son ampliamente usadas en elementos arquitectónicos, por ejemplo, al recubrir pisos con mosaicos.



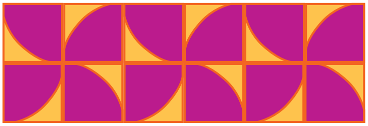
1. Considera la siguiente figura base:  Escribe, en cada caso, si para formar el diseño se aplicó a la figura base una traslación, una rotación o una simetría. Ten en cuenta que, en cada ejemplo, pudo haberse aplicado más de una transformación.



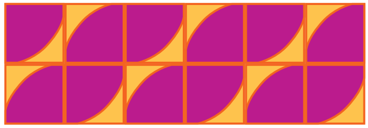
Simetría y traslación



Simetría, rotación y traslación



Rotación y traslación



Rotación y traslación

2. Traza en una hoja de papel ocho figuras base similares a la anterior. El cuadrado debe medir 2 cm de lado. Recórtalas, inventa un diseño y pégalo en el siguiente espacio. Anota las transformaciones que hayas aplicado.

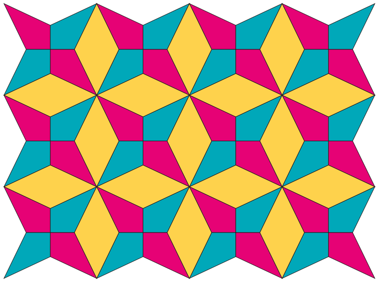
R. P.

* Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Entre todos, elijan alguna de las explicaciones que escribieron en la actividad anterior y comprueben que hayan empleado de manera correcta el lenguaje geométrico al describir las transformaciones hechas. Si es necesario, hagan a su texto las modificaciones que consideren pertinentes.

3. Analiza el siguiente diseño. Describe cómo puede construirse.

comunicar

R. P.



Una pista

Identifica la figura base y describe las transformaciones hechas.

4. Traza en tu cuaderno un triángulo equilátero de 3 cm de lado. Dibuja dentro de él algunos motivos, de creación propia o inspirados en un logotipo, y coloréalo a tu gusto. Reprodúcelo 12 veces. Elabora otro diseño usando solamente transformaciones geométricas y pégalo en tu cuaderno.

5. Considera los siguientes logotipos.

Rotación

Rotación y traslación



Traslación y simetría central



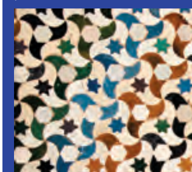
- Responde, en grupo, en cuáles de estos logotipos hay simetrías, traslaciones o rotaciones. Identifiquen, en el caso de las simetrías axiales o centrales, el eje o centro de simetría, y en las rotaciones, el centro y el ángulo de rotación.

6. Diseña, para tu escuela, un logotipo en que apliques una o más transformaciones geométricas.

- Organiza, junto con el grupo, una exposición de logotipos en tu escuela. Elijan el que más les guste.

En contexto

Los mosaicos árabes de la Alhambra, en Granada (España), son una muestra del arte que se consigue al aplicar traslaciones, rotaciones y simetrías.



BLOQUE 2

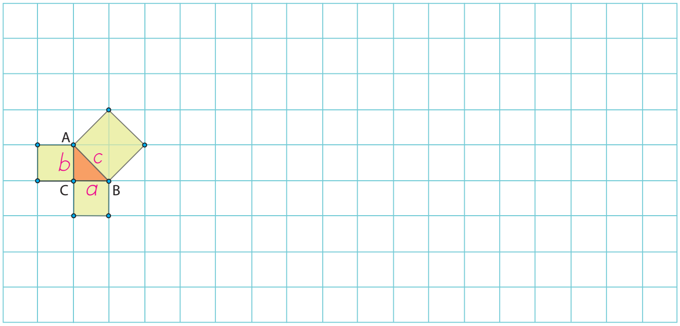
Secuencia 4 / lección 34

Teorema de Pitágoras

CONTENIDO Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es una figura muy importante pues se relaciona directamente con el teorema de Pitágoras. Te preguntarás qué es un teorema, quién fue Pitágoras, o en qué consiste el teorema de Pitágoras. Al estudiar esta secuencia, resolverás éstas y otras preguntas.

1. Considera el lado de un cuadrito como la unidad de longitud y la superficie de un cuadrito como la unidad de área. Haz lo que se indica y responde en tu cuaderno.



a) Escribe letras minúsculas en los lados que forman el triángulo rectángulo. A cada lado le corresponde la letra del vértice opuesto.

b) Verifica que los lados que forman el ángulo recto sean *a* y *b*. Éstos se llaman *catetos*. El lado *c* es la *hipotenusa*.

c) Suma las áreas de los cuadrados cuyo lado fue trazado en los catetos y compara el resultado con el área del cuadrado cuyo lado fue trazado sobre la hipotenusa. ¿Qué relación tienen las áreas? R. T. El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de los triángulos.

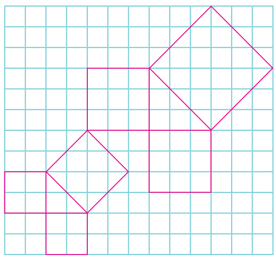
d) Traza en la cuadrícula superior, a la derecha de la figura anterior, una figura semejante, pero con un triángulo rectángulo más grande. Averigua los siguientes datos.

» Área del cuadrado trazado a partir de un cateto: R. P.

» Área del cuadrado trazado a partir del otro cateto: ____________

» Área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa: ____________

2. Dibuja en la cuadrícula derecha un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 unidades, y otro cuyos catetos midan 3 unidades. Calcula en cada uno el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa, y verifica que ésta sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos.



conect@mos

Descarga la actividad de triángulos y cuadrados en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar, comenten, con el resto del grupo, cuándo el área mayor es más pequeña que la suma de las áreas menores, y cuándo sucede lo contrario.

3. La figura que se muestra a continuación es un triángulo rectángulo. Advierte que sus tres lados miden una cantidad entera de unidades. Analízala y haz lo que se indica.

a) Anota las longitudes de los lados del triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados trazados en cada lado.

Cateto a = 3

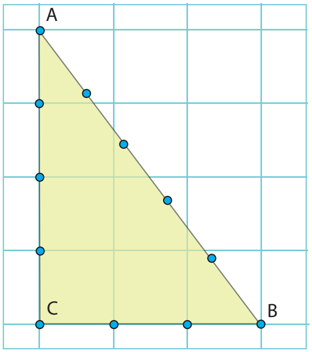
Cateto b = 4

Hipotenusa c = 16

a^2 = 9

b^2 = 16

c^2 = 25



b) Completa las expresiones.

Área del cuadrado construido sobre el cateto a más área del cuadrado construido sobre el cateto b = $a^2 + b^2$

Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa menos área del cuadrado construido sobre el cateto a = $c^2 - a^2$

Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa menos área del cuadrado construido sobre el cateto b = $c^2 - b^2$

En contexto

En los triángulos pitagóricos, las medidas de los tres lados son números naturales, tales que $a^2 + b^2 = c^2$. El triángulo pitagórico que se muestra a la izquierda se conoce como triángulo sagrado egipcio, y sirvió de base para construir la pirámide de Kefrén, 2 600 años a. C.

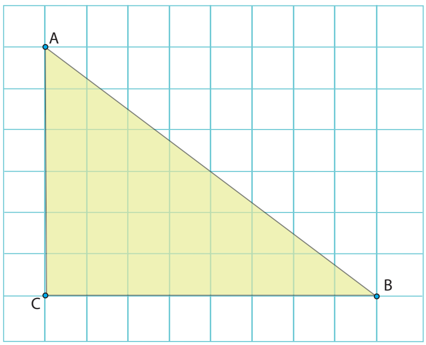
4. **El siguiente triángulo rectángulo también es pitagórico. Haz en tu cuaderno lo que se indica.**

resolver

a) Calcula el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa. 100 u^2

b) Calcula la medida de la hipotenusa. 10 u

c) Verifica que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos. R. T. 36 + 64 = 100



- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Averigüen si la relación anterior también se cumple para un triángulo rectángulo cuyos lados miden 21 cm, 28 cm y 35 cm. Discutan si, dados tres números que cumplan la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, se puede afirmar que cualquier triángulo cuyos lados midan a, b y c es un triángulo rectángulo.**

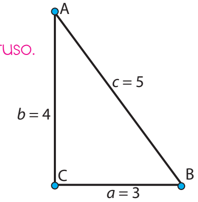
Secuencia 4 / lección 35

Mostrar o demostrar

CONTENIDO Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

validar

1. Analiza el triángulo rectángulo. Haz lo que se indica y responde en tu cuaderno.



a) Verifica que $c^2 = a^2 + b^2$.

b) Si c^2 fuera mayor que $a^2 + b^2$, ¿qué tipo de ángulo sería **C**? Obtuso. ¿Qué tipo de triángulo sería **ABC** y por qué? Obtusángulo.

c) Si c^2 fuera menor que $a^2 + b^2$, ¿qué tipo de triángulo sería? ¿Por qué? Acutángulo.

d) Explica con tus palabras el significado de la relación $a^2 + b^2 = c^2$. R. T. Cada vez que se cumple esa relación entre los lados de un triángulo, entonces es un triángulo rectángulo.

- Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, el significado que escribiste en el inciso d). Acuerden, entre todos, una redacción común y anótenla.

2. Las medidas entreras de los lados de un triángulo rectángulo (3, 4 y 5, en el ejemplo anterior) se conocen como *terna pitagórica*, pues son medidas que satisfacen el teorema de Pitágoras, es decir, el cuadrado de la medida mayor es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos. Analiza, en equipo, las siguientes ternas y, sin trazar los triángulos, anota **P** en las que sean pitagóricas; **O** en las que correspondan a un triángulo obtusángulo; y **A** en las que pertenezcan a un triángulo acutángulo. Comprueben sus respuestas trazando los triángulos en su cuaderno.

a) 5, 12, 13 P b) 6, 7, 8 A c) 5, 8, 11 O

d) 16, 30, 34 P e) 13, 15, 23 O f) 24, 7, 25 P

- Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Luego contesten lo siguiente.

a) ¿Cómo saben si una terna es pitagórica? R. T. El cuadrado del número más grande es la suma de los cuadrados de los números más pequeños.

b) ¿Cómo saben si una terna corresponde a un triángulo obtusángulo? R. T. Cuando el cuadrado del número más grande en mayor que la suma de los cuadrados de los números pequeños.

c) ¿Cómo saben si una terna corresponde a un triángulo acutángulo? R. T. La suma de los cuadrados de los dos lados menores es mayor que el cuadrado del lado mayor.

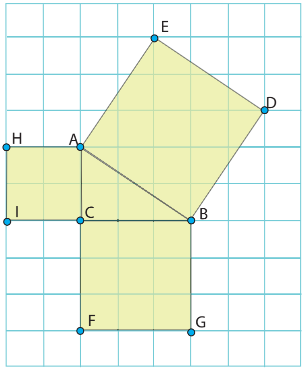
3. Analiza la figura y contesta o haz lo que se indica.

a) ¿Cuánto suman las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos?

$4\ u^2 + 9\ u^2 = 13\ u^2$

b) Busca una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa equivale a la suma del inciso anterior. Explica tu propuesta.

R. P.



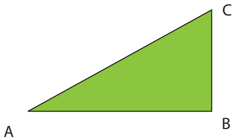
Una pista

Para calcular el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa puedes encerrarlo en una figura más grande, de la cual sea fácil calcular el área y restar lo que sobre.

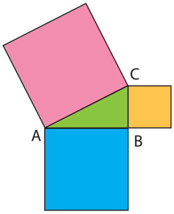
4. **Una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos es la siguiente. Haz, en equipo, lo que se indica.**

técnicas

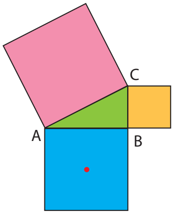
1. Dibujen un triángulo rectángulo como el siguiente, y nómbrenlo **ABC**.



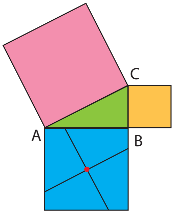
2. Tracen un cuadrado en cada lado del triángulo rectángulo.



3. Localicen el centro del cuadrado trazado a partir del lado $\overline{AB}$.



4. Tracen una paralela y una perpendicular a la hipotenusa que crucen por el centro del cuadrado trazado a partir de $\overline{AB}$.



5. Recorten las cuatro piezas del cuadrado trazado a partir de $\overline{AB}$.
6. Con esas piezas y el cuadrado trazado a partir de $\overline{BC}$, cubran el cuadrado trazado sobre la hipotenusa.

Comprueben, en grupo y con ayuda del profesor, si todos pudieron cubrir el cuadrado trazado sobre la hipotenusa. Si alguien no pudo, averigüen a qué se debió. Comparen sus procedimientos y resultados.

conect@mos

Aprende más acerca del teorema de Pitágoras en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/pitagoras/actividad.html

Lee la información que se presenta y contesta las preguntas. Si tienes dudas, revisa los conceptos y las técnicas expuestas durante esta secuencia.

Secuencia 5 / lección 36

Dos lados conocidos y uno desconocido

CONTENIDO

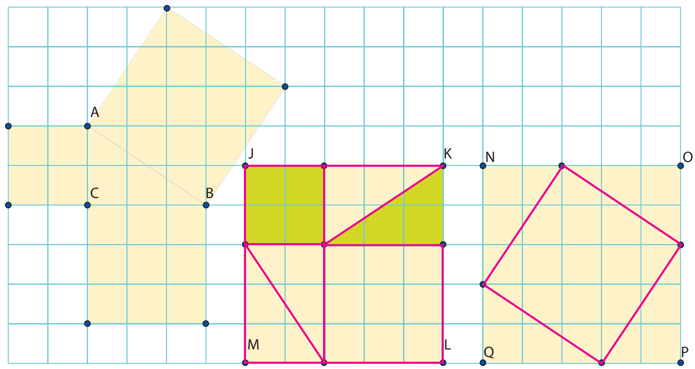
Explicito y uso el teorema de Pitágoras

¿Cómo averiguar el área de un triángulo equilátero si sólo se conoce la medida de un lado? ¿De qué manera se anticipa la altura a la que llegará una escalera recargada en la pared? Estos son ejemplos de problemas que resolverás si sabes utilizar el teorema de Pitágoras.

En contexto

Una demostración matemática es un razonamiento basado en ideas que se dan por ciertas, o en teoremas demostrados.

1. La siguiente construcción es una demostración gráfica del teorema de Pitágoras, cuyo diseño se atribuye a él mismo. Analízala y haz lo que se indica para que entiendas en qué consiste. Ten en cuenta que los cuadrados **JKLM** y **NOPQ** son congruentes.



a) En el cuadrado **JKLM** une los puntos para obtener cuatro triángulos congruentes al **ABC** y dos cuadrados del mismo tamaño que los construidos sobre los catetos. En la figura ya se trazaron un triángulo y el cuadrado del cateto menor.

b) Une los puntos en el cuadrado **NOPQ** para obtener cuatro triángulos congruentes con el triángulo **ABC**, y un cuadrado del mismo tamaño que el trazado sobre su hipotenusa.

c) Completa los siguientes enunciados. Considera el ejemplo.

» El área del cuadrado **JKLM** es la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ más cuatro triángulos congruentes con el **ABC**.

» El área del cuadrado **NOPQ** es la suma del área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ más Cuatro triángulos congruentes al ABC.

» Por tanto, el área total de los cuadrados construidos a partir de los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

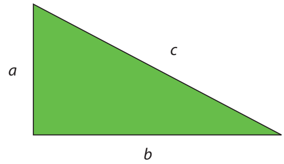
✷ Analiza, con el grupo y con ayuda del profesor, los enunciados que escribiste. Acuerden una redacción común.

Convivimos

¿Cómo afrontas una situación nueva para ti? Aquella que adoptas, ¿es la mejor actitud? Coméntalo con tus compañeros. Un problema matemático también es una situación novedosa; atrévete a encontrar con tus recursos la manera de solucionarlo. Ten confianza en lo que conoces, usa dibujos, diagramas, calculadora, etcétera.

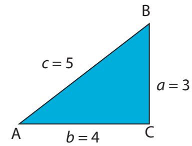
Lo que hicieron en la actividad anterior es una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos. Esta propiedad se llama **teorema de Pitágoras**, y algebraicamente se escribe $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Trabaja en equipo. Consideren que, en un triángulo rectángulo, un cateto mide a; otro, b; y la hipotenusa, c; como se muestra en el triángulo verde. La relación entre las áreas de los cuadrados que se trazan en los lados se puede expresar de tres maneras. Escríbanlas.



$c^2 =$ $a^2 + b^2$ $\qquad a^2 =$ $c^2 - b^2$ $\qquad b^2 =$ $c^2 - a^2$

3. Hagan, con base en el triángulo **ABC** (azul), lo siguiente.



a) Verifiquen cuáles de las siguientes relaciones se cumplen, sustituyendo en cada igualdad el valor de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Tachen la que no se cumpla. Todas se cumplen.

$a^2 + b^2 = c^2$ $\quad 9 + 16 = 25$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$ $\quad 25 = 9 + 16$

$a^2 = c^2 - b^2$ $\quad 9 = 25 - 16$ $\qquad b^2 = c^2 - a^2$ $\quad 16 = 25 - 9$

b) Contesten las preguntas.

» $\sqrt{5^2} =$ 5 $\qquad \sqrt{20^2} =$ 20 $\qquad \sqrt{134^2} =$ 134 $\qquad \sqrt{84^2} =$ 84

» ¿Por qué, para números positivos, elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada son operaciones inversas? Contesten en su cuaderno.

» ¿Qué otras operaciones inversas conocen? R. T. suma y resta, multiplicación y división (para números distintos de cero).

c) Completen las siguientes relaciones con base en sus respuestas anteriores.

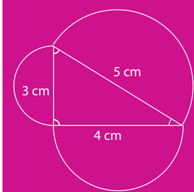
» Si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

» Si $a^2 = c^2 - b^2$, entonces $a =$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$ y $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

» Si $b^2 = c^2 - a^2$, entonces $b =$ $\sqrt{b^2} = \sqrt{c^2 - a^2}$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

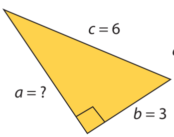
Reflexionamos

¿Consideras que el teorema de Pitágoras se cumple si se trazan semicírculos en lugar de cuadrados?

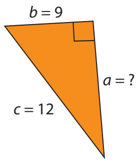


¿Cómo lo demostrarías?

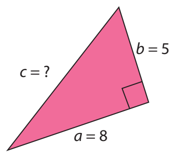
4. Calculen la medida faltante de cada triángulo rectángulo.



$a =$ $\sqrt{27}$



$a =$ $\sqrt{63}$



$c =$ $\sqrt{89}$

sm

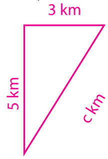
Problemas diversos

CONTENIDO Explicito y uso el teorema de Pitágoras

resolver

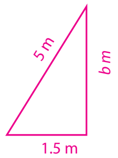
1. Resuelve, en equipo, los siguientes problemas. Pueden usar calculadora cuando sea necesario, así como trazar las figuras relacionadas con cada inciso.

a) Primer problema
Caminé hacia el norte 5 km y luego hacia el este 3 km. ¿A qué distancia estoy del punto de partida?



$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

b) Segundo problema
Una escalera de 5 m de largo se apoya sobre el piso a 1.5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza ésta respecto al piso?

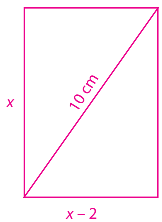


$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 1.5^2} = \sqrt{25 - 2.25} = \sqrt{22.25} \approx 4.76$

c) Tercer problema
Quiero cubrir un piso cuadrado, que mide 4 m de lado, usando losetas hexagonales. Cada una mide 10 cm de lado. Si éstas se venden en cajas de 38 piezas, ¿cuántas cajas debo comprar para que me sobre la menor cantidad de losetas posible?

17 cajas

d) Cuarto problema
¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm, y cuya base mide 2 cm menos que la altura?



Por el teorema de Pitágoras

$x^2 + (x - 2)^2 = 100$

$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100$

$2x^2 - 4x - 96 = 0$

$x^2 - 2x - 48 = 0$ donde $a = 1$, $b = -2$, $c = -48$

Entonces $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-48)}}{2}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2}$

y se toma el valor positivo de x. $x = 8$

Entonces el rectángulo tiene medidas de 8 cm y 6 cm.

2. Contesta, en equipo y con base en la actividad anterior, lo siguiente.

a) De acuerdo con los datos que se exponen en el segundo problema, ¿es posible que la altura que alcanza la escalera estando recargada en la pared sea mayor que la de la escalera en posición vertical? no ¿Por qué? R. T.
Se forma un triángulo donde la escalera es la hipotenusa y ningún cateto puede ser mayor que la hipotenusa.

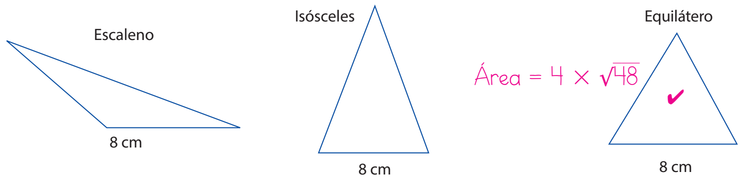
b) Si, en el primer problema, la caminata fuera hacia el norte y luego hacia el oeste, ¿cuál sería el resultado? el mismo ¿Y si fuera hacia el norte y luego hacia el sur? 2 km, pues son direcciones opuestas.

c) Si, en el tercer problema, en lugar de losetas hexagonales se utilizaran otras en forma de triángulo equilátero, cada una de 10 cm de lado, ¿cuántas losetas se necesitarían para cubrir el mismo piso? 98

d) Si, en el cuarto problema, la base del rectángulo midiera 2 cm más que la altura, ¿cuáles serían sus dimensiones ? Las mismas: 6 cm y 8 cm.

3. ¿En cuál de los siguientes triángulos se proporciona información suficiente para calcular su área usando el teorema de Pitágoras? Haz el cálculo.

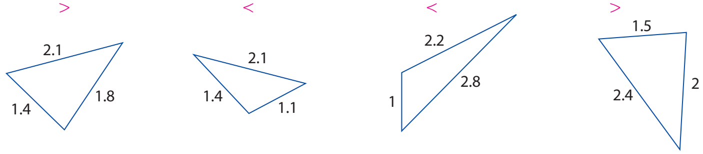
validar



Área = 4 × $\sqrt{48}$ ✔

4. Anota, junto a cada triángulo y según corresponda, "$a^2 + b^2 > c^2$" o "$a^2 + b^2 < c^2$" (considera que c representa la longitud del lado mayor). Escribe también si se trata de un triángulo obtusángulo o uno acutángulo.

> < < >



Acutángulo Obtusángulo Obtusángulo Acutángulo

✵ Comenten, con ayuda del profesor, cómo se relacionan la actividad 4 y el teorema de Pitágoras. Redacten una versión extendida del teorema, que considere cualquier tipo de triángulo.

conect@mos

Practica el teorema de Pitágoras en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/horizonte/actividad.html

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

BLOQUE 2

Secuencia 6 / lección 38

Que caiga tres, que no caiga tres

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Si conoces la probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado, ¿cómo calculas la probabilidad de que no caiga 3? Si conoces las probabilidades de obtener, por separado, 2, 4 o 6, ¿cómo calculas la probabilidad de que suceda cualquiera de las tres cosas?

1. Resuelve los siguientes problemas.

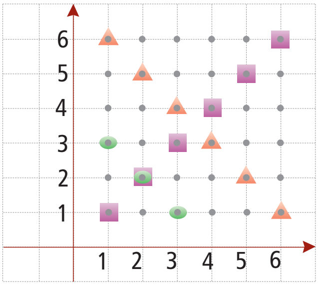
   a) Gisela debe tirar dos dados en un juego de mesa. Ella piensa que es de "mala suerte" obtener números iguales. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga "buena suerte"? $\frac{5}{6}$

   b) Joaquín ha contestado al azar un reactivo de cuatro opciones, de las cuales sólo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte? $\frac{1}{4}$ ¿Y de que no? $\frac{3}{4}$

   c) Alfonso lanzará una moneda al aire cuatro veces. Ha apostado que caerá lo mismo en cada lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que pierda la apuesta? $\frac{7}{8}$

comunicar

2. En el siguiente esquema se aprecia el espacio muestral de un experimento que consiste en lanzar dos dados. Además, hay una fila de triángulos, una de rectángulos y otra de óvalos, que señalan, respectivamente, los espacios muestrales de tres eventos: **A**, **B** y **C**.



   a) Describe los eventos A, B y C.

   A: Que los dados sumen 7.

   B: Mismo resultado en ambos dados.

   C: Que la suma sea 4.

   b) Completa la siguiente tabla.

Probabilidad de que ocurra	Probabilidad de que no ocurra
A: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	A: $\frac{5}{6}$
B: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	B: $\frac{5}{6}$
C: $\frac{3}{36}$	C: $\frac{11}{12}$

✷ Compara, con ayuda del profesor, tus resultados con los de tus compañeros. Comenten cómo se calcula la probabilidad de que un evento NO ocurra si se conoce la probabilidad de que ocurra.

En contexto

Recorre el estudio de los números, la probabilidad y los códigos matemáticos en *Matemáticas*, de la Biblioteca de Aula.

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Altea, serie Espejo de Urania, 2005.

3. Lee, con el grupo, la siguiente información. Al terminar, escriban en su cuaderno tres ejemplos de parejas de eventos complementarios.

El evento M, "salir 5 al lanzar un dado", es complementario del evento N, "no salir 5 al lanzar un dado". De manera abreviada, la probabilidad del evento M se expresa P(M), y la probabilidad del complemento de M se expresa $P(M^C)$

4. Trabaja en equipo. Calculen, con base en los siguientes eventos, las probabilidades que se piden.

A: al lanzar un dado se obtiene número par.

B: al lanzar dos dados, la suma de los números es un número impar.

C: al lanzar dos dados, la suma de los números es 10.

D: al sacar una bola de una bolsa que contiene tres bolas negras y dos rojas, sale una negra.

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(A^c) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$ $P(B^c) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $P(C^c) = \frac{11}{12}$

$P(D) = \frac{3}{5}$ $P(D^c) = \frac{2}{5}$

Convivimos

Además de usar tu intuición, emplea procedimientos matemáticos para tomar decisiones. ¿Cómo convencerías a un compañero de que no existe buena o mala suerte al tirar los dados?

resolver

5. Lee, con el grupo, la siguiente información. Al finalizar, efectúen lo que se pide.

La probabilidad de que un evento ocurra más la probabilidad de que ese mismo evento no ocurra es igual a 1. Es decir, la suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es 1.

Por ejemplo, en la actividad anterior:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A^C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{3}{36}$, $P(C^C) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$

- Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas de la actividad 4 con las de sus compañeros; si hay diferencias, intercambien ideas y corrijan lo necesario. Verifiquen que en los cuatro casos se trate de eventos complementarios y, por tanto, las probabilidades cumplan con lo expuesto en el recuadro anterior.

BLOQUE 2

Secuencia 6 / lección 39

Pelotas rojas o juguetes azules

CONTENIDO Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Una pista

La probabilidad más alta que puede tener un evento es 1. Si alguna de las probabilidades fue mayor a 1, el resultado es incorrecto.

1. Laura está en una feria, y en uno de los juegos se ha ganado un premio, que elegirá al azar. Hay 160 pelotas y 40 juguetes. Los premios son de tres colores: 80 son rojos; 50, azules; y 70, verdes. De las pelotas, 30 son azules. Calcula las siguientes probabilidades. Si en algún caso supones que no hay información suficiente para encontrar la respuesta, explica en tu cuaderno por qué lo consideras así.

a) La probabilidad de que el premio sea un juguete azul. $\frac{1}{10}$

b) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul. $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

c) La probabilidad de que el premio sea verde o azul. $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

d) La probabilidad de que el premio sea un juguete o un premio de color rojo. Falta información.

2. Completa las siguientes expresiones.

a) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul no es igual a la probabilidad de que sea una pelota más la probabilidad de que sea un premio azul porque R. T. Hay premios que son pelotas azules.

b) La probabilidad de que el premio sea verde o azul es igual a la probabilidad de que sea verde más la probabilidad de que sea azul porque R. T. No hay premios que sean verdes y azules.

c) En el problema no se proporcionan los datos necesarios para calcular la probabilidad de que el premio sea un juguete o un un premio de color rojo, pues falta conocer R. T. La cantidad de pelotas rojas o de juguetes rojos.

d) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul es igual a la probabilidad de que sea una pelota más la probabilidad de que sea un premio azul menos la probabilidad de que sea una pelota azul porque R. P.

Ya sabemos...

Dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no tienen elementos en común. Por ejemplo, los eventos A = "premio verde" y B = "premio azul".

Reflexionamos

Si dos eventos, A y B, son complementarios, entonces P(A o B) = P(A) + P(B). ¿Por qué?

3. Alejandra ganó un premio en la feria. En el juego en que participó hay pulseras, peluches y relojes. Los premios son de color lila, rosa, azul cielo o café. No se sabe cuántos premios hay en total, ni cuántos de cada tipo, pero se conocen las siguientes probabilidades.

P(pulsera) = 14% P(reloj) = 53% P(reloj lila) = 45%
P(lila) = 60% P(rosa) = 21% P(rosa o azul cielo) = 28%

Calcula la probabilidad de que el premio sea…

a) De cuaquier color, menos café. 88%

b) Un peluche. 33%

c) De color azul cielo. 7%

d) Un reloj o un premio de color lila. 68%

4. En el problema anterior se sabe también que la probabilidad de que el premio sea una pulsera o un premio de color rosa es igual a la probabilidad de que sea rosa. Calcula la probabilidad de que el premio sea una pulsera o un premio de color lila. 74%

5. Alejandra y Federico trataron de adivinar el premio que obtendrán. Las probabilidades que tienen de hacerlo son 12% y 93%, respectivamente.

a) ¿Las predicciones son mutuamente excluyentes? No Explica por qué. R. T. Porque suman más de 100%

b) Averigua qué premio creen Alejandra y Federico que obtendrán. Considera los porcentajes ya referidos, es decir, 12% y 93%, respectivamente.

Alejandra apostó a que sale algo color café. Federico apostó a que sale algo que no es de color azul cielo.

6. Federico jugará en la feria. Hay tres puestos que le gustan. En los tres se ofrecen pulseras, pelotas y relojes. Además, si gana un premio en cualquiera de los puestos, la probabilidad de que no sea un reloj es de 90%, y la probabilidad de que sea una pulsera es de 30%. Calcula cuántas pulseras y cuántas pelotas hay en cada puesto.

Pulseras	Pelotas	Total de premios
60	120	200
45	90	150
90	180	300

- Lee y comenta, con tus compañeros, la siguiente información. A partir de ella verifiquen sus resultados de los problemas de esta secuencia.

Cuando dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B se calcula al sumar la probabilidad de que ocurra A más la probabilidad de que ocurra B. Es decir,

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Si los dos eventos no son mutuamente excluyentes, entonces hay que restar, a la suma de las dos probabilidades, la probabilidad de que sucedan ambos eventos, pues ha sido contada dos veces. Es decir,

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

conect@mos

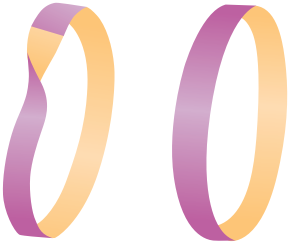
Calcula más probabilidades en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/estimacion/ruleta_frutas/actividad.html

Trabaja en pareja. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

Una pista

Para obtener el 10% de una cantidad, basta dividirla entre 10. A partir de ese 10%, es fácil obtener el 30%.



Una tira de papel

Para las siguientes actividades necesitarás cuatro tiras de papel, cada una de 35 cm de largo y 4 cm de ancho, pegamento y dos lápices de distinto color.

- Une los extremos de cada tira para formar una banda, pero en dos de ellas da media vuelta a un extremo antes de pegarlos, como lo muestra la ilustración.
- Toma dos bandas, una pegada con media vuelta y otra normal. Haz, en cada una, un trazo longitudinal continuo por la mitad de una cara, que termine donde empezó.

¿Qué observas?

R. T. El trazo de la normal se da en un solo lado de la tira. El trazo de la que tiene la media vuelta abarca los dos lados de la tira.

Colorea las caras de las dos bandas restantes.

¿Qué notas?

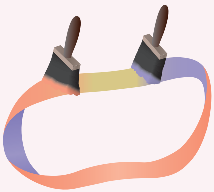
R. T. Lo mismo que en el caso del trazo de la línea.

¿Cuántas caras tienen las bandas cuyos extremos se pegaron sin girar la tira?

Dos.

¿Cuántas caras tienen las bandas cuyos extremos se pegaron dando media vuelta a uno de ellos?

Una.



La tira que uniste dando media vuelta a uno de sus extremos tiene una sola cara y es conocida como **banda de Möbius**, en honor al matemático alemán August Ferdinand Möbius, quien hizo el sorprendente descubrimiento de la existencia de superficies, como ésta, con un solo lado.

La banda de Möbius tiene más propiedades insospechadas y, como comprobarás a continuación, algunas de ellas se advierten al cortar la tira a lo largo, por la línea que marcaste.

Ahora necesitarás ocho tiras de papel, cada una de 40 cm de largo y 5 cm de ancho, para formar bandas de Möbius y bandas normales.



Toma una banda de Möbius y una normal. Córtalas por la mitad, como muestra la imagen.

¿Cuántas tiras obtuviste al cortar la banda de Möbius? Una.

¿La banda que obtuviste es normal o es de Möbius? De Möbius.

¿Cuántas tiras obtuviste al cortar la banda normal? Dos.



Ahora toma una de las tiras y da una vuelta completa a uno de sus extremos antes de unirlos.

¿Cuántas caras tiene? Dos.

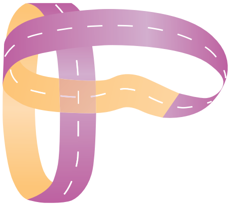
¿Qué sucede si cortas la tira de la misma manera que en los casos anteriores?

R. T. Mantiene las dos caras.

Anota en la siguiente tabla el resultado que obtengas al dar las vueltas que se indican y cortar cada tira.

Número de vueltas	Resultado de un corte a la mitad	Características de la(s) banda(s) obtenida(s)	Dibujo
0	2 bandas	La mitad de ancho y el mismo largo	
$\frac{1}{2}$	1 banda con 1 vuelta, 2 caras	La mitad de ancho, doble largo	
1	2 bandas entrelazadas con 1 vuelta	La mitad de ancho y el mismo largo	
1 y $\frac{1}{2}$	1 banda con 2 caras	La mitad de ancho y doble largo	
2	2 bandas entrelazadas con 2 caras	La mitad de ancho y el mismo largo	
2 y $\frac{1}{2}$	1 banda con 2 caras	La mitad de ancho y el mismo largo	

Elabora dos bandas, una normal y otra de Möbius; únelas formando un ángulo recto, como se muestra en la imagen, y después corta ambas a lo largo.



¿Qué sucedió? Quedaron unidas.

Si quieres conocer más información acerca de la banda de Möbius y otros objetos matemáticos con propiedades interesantes, entra en

matesmates.wordpress.com/2011/02/16/la-cinta-de-moebius/
recursostic.educacion.es/descartes/web/matemagicas/pages/delices/textes/mobius.htm

Selecciona la opción correcta.

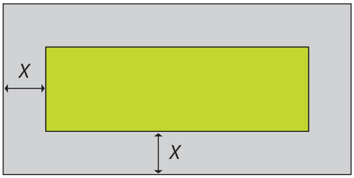
1. Se colocará una banqueta en el perímetro de un terreno rectangular de 50 m × 100 m, pero se dejará el centro como área verde. El presupuesto alcanza para pavimentar 1 400 m², y se desea que el ancho de la banqueta sea uniforme. ¿Qué ancho tendrá la banqueta como máximo?

a) 5 m

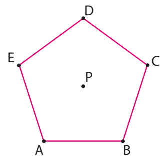
b) 6 m

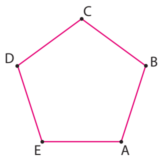
c) 8 m

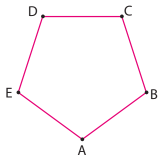
d) 10 m

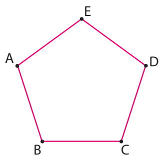


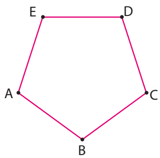
2. El pentágono de la derecha es regular. Si su centro de rotación es el punto **P**, ¿qué figura se obtiene al rotarlo 72° en sentido contrario a las manecillas del reloj?



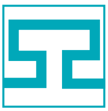
a) 

b) 

c) 

d) 

3. ¿Qué diseño tiene simetría central pero no axial?

a) 

b) 

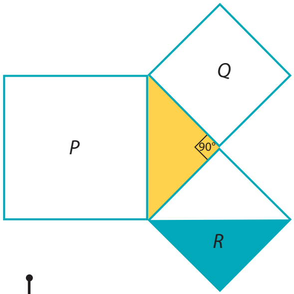
c) 

d) 

4. Eric lanzará un dado en su último turno en un juego de mesa. Para ganar necesita un 5 o un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

a) $\frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{6} - \frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{6}$ d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$

5. Se han trazado tres cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo. Si **P** y **Q** representan el área de los cuadrados respectivos, y **R**, la del triángulo azul, ¿cómo están relacionados **P**, **Q** y **R**?



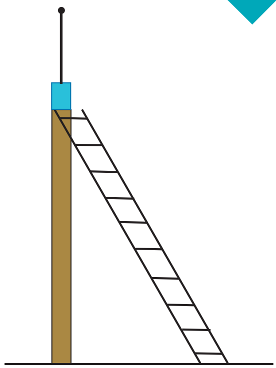
a) $P^2 = Q^2 + R^2$

b) $P = Q + R$

c) $P = Q + 2R$

d) $P^2 = Q^2 + 2R^2$

6. Para instalar una antena en un poste de 17.6 m de altura se usó una escalera como se muestra en la figura. ¿Qué longitud tiene la escalera si ésta se colocó a 8.6 m de la base del poste?



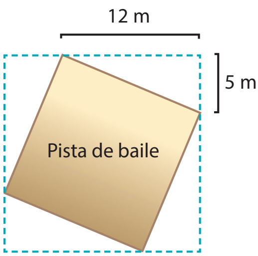
a) 9.5 m

b) 15.3 m

c) 19.6 m

d) 26.2 m

7. ¿Cuánto mosaico se requiere para cubrir la pista de baile?



a) 144 m^2

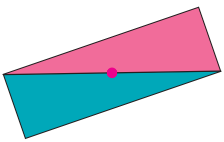
b) 169 m^2

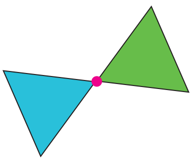
c) 189 m^2

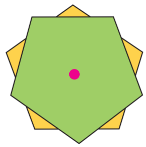
d) 289 m^2

Haz lo que se indica.

8. En cada pareja, una figura es producto de la rotación de la otra. Marca el centro de rotación en cada caso.







Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Comunicar información matemática





Simetría y belleza

Durante mucho tiempo, las transformaciones geométricas, como traslaciones, giros y simetrías, han sido utilizadas en la ingeniería, la arquitectura y muchas manifestaciones artísticas más. Algunas teorías señalan que esta fascinación por la geometría dinámica y la simetría tiene su origen en la estructura de los seres vivos. La simetría en la naturaleza es el resultado de un largo proceso evolutivo e, instintivamente, los animales eligen a compañeros con una anatomía lo más simétrica posible.

Pregunta 1. Busca en tu entorno tres objetos que presenten simetría. Dibújalos e indica qué transformaciones geométricas utilizaste para ello.

R. P.

Pregunta 2. Escribe una posible ventaja (que no sea puramente estética) que tenga un edificio simétrico sobre otro no simétrico.

R. P.

Pregunta 3. Escribe una posible ventaja (que no sea la preferencia que otros miembros de su especie puedan tener por él) que tenga un animal simétrico sobre otro no simétrico.

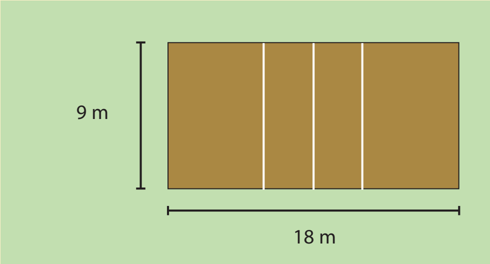
R. P.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

La cancha de volibol

Sofía y sus amigas trazaron en el patio de su escuela una cancha de volibol como la siguiente.



Pregunta 1. Utilizando sólo cinta métrica, ¿como verifica Sofía que la cancha tenga forma rectangular, es decir, que sus ángulos midan 90°?

R. T. Mide la diagonal y verifica que se cumpla el teorema de Pitágoras.

Pregunta 2. Si la cancha tiene forma rectangular, ¿cuánto mide cada diagonal?

a) 27 m b) 25.4 m c) 20.1 m d) 12.7 m

Pregunta 3. ¿Cuánto mide la diagonal de media cancha (un cuadrado de 9 m de lado)?

12.727922 m

Autovaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, tendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar diversas situaciones.				
Resuelvo ecuaciones cuadráticas mediante la factorización.				
Identifico las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.				
Elaboro diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.				
Interpreto las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se trazan a partir de los lados de un triángulo rectángulo.				
Uso el teorema de Pitágoras para resolver problemas.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ______________

Y para terminar...

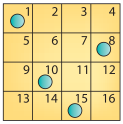
Dibujemos puntos

Dibuja en cada tablero cuatro puntos, de manera que en cada fila, cada columna y cada diagonal principal haya un solo punto.

A continuación se muestran dos soluciones posibles.

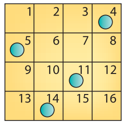
A

A



B

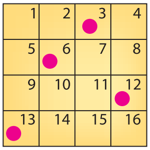
B



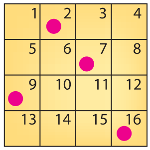
Hay otras seis soluciones posibles si se dibujan los puntos en otras casillas. Encuéntralas.

R. T.

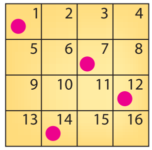
C



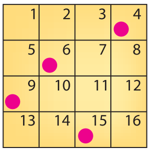
D



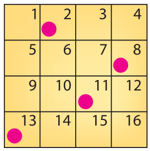
E



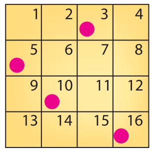
F



G

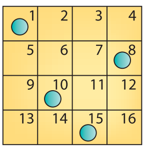


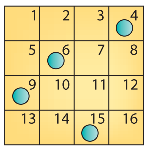
H



Las ocho soluciones están relacionadas entre sí mediante simetrías y rotaciones. Por ejemplo, observa los puntos de las soluciones A y B, y notarás que son simétricos respecto a la línea roja.

En este otro ejemplo, la solución de la derecha se obtiene rotando 90° la solución A.





- Si no has encontrado todas las soluciones posibles, aplica simetrías y rotaciones para hallarlas. Los ejes pueden ser verticales, horizontales o inclinados.

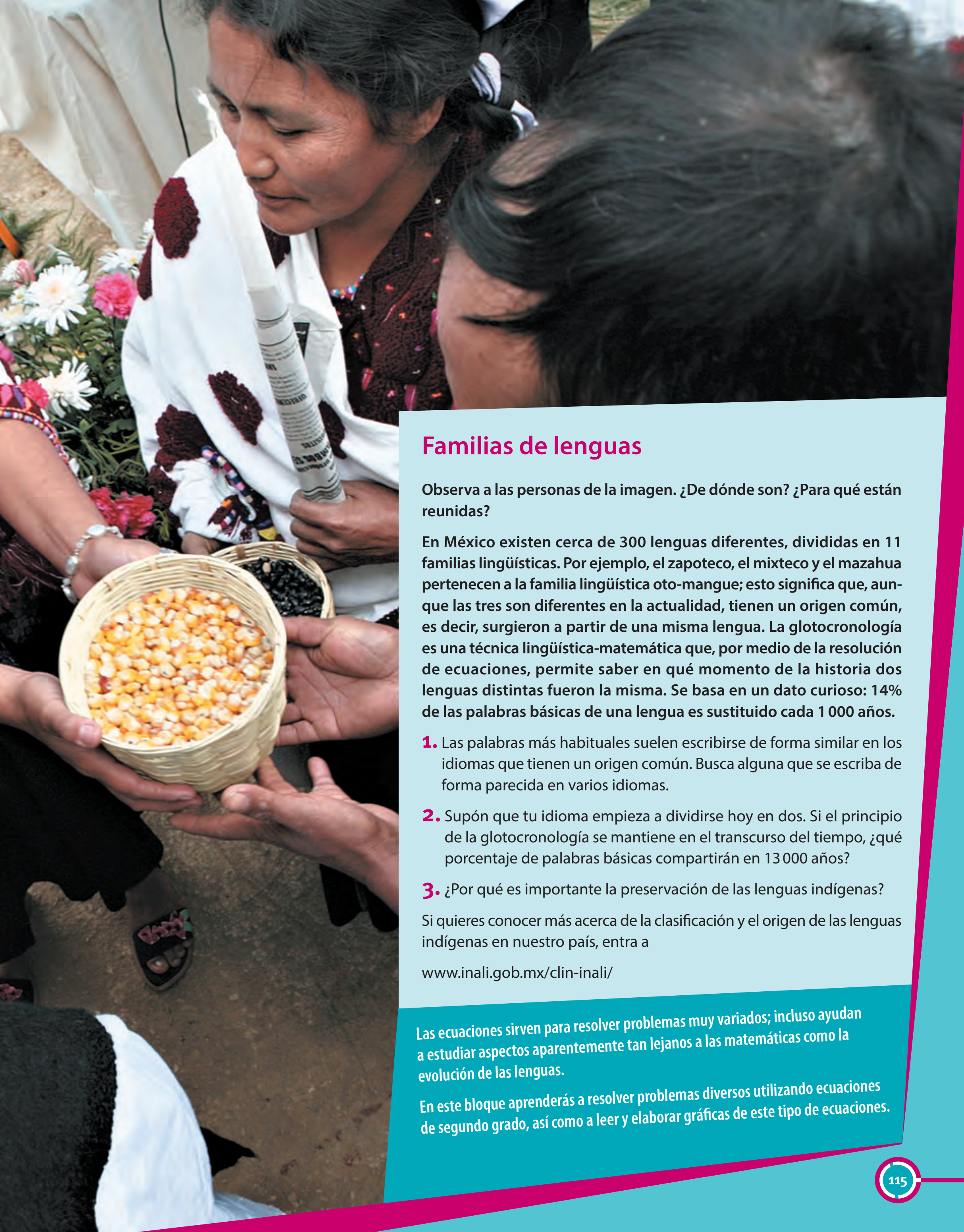
- Busca las relaciones de simetría y rotación que hay en todas las soluciones. Verifica que todas las soluciones se puedan obtener a partir de una sola, ya sea mediante una o dos transformaciones.



BLOQUE 3

Aprendizajes esperados

- ✓ Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.



Familias de lenguas

Observa a las personas de la imagen. ¿De dónde son? ¿Para qué están reunidas?

En México existen cerca de 300 lenguas diferentes, divididas en 11 familias lingüísticas. Por ejemplo, el zapoteco, el mixteco y el mazahua pertenecen a la familia lingüística oto-mangue; esto significa que, aunque las tres son diferentes en la actualidad, tienen un origen común, es decir, surgieron a partir de una misma lengua. La glotocronología es una técnica lingüística-matemática que, por medio de la resolución de ecuaciones, permite saber en qué momento de la historia dos lenguas distintas fueron la misma. Se basa en un dato curioso: 14% de las palabras básicas de una lengua es sustituido cada 1 000 años.

1. Las palabras más habituales suelen escribirse de forma similar en los idiomas que tienen un origen común. Busca alguna que se escriba de forma parecida en varios idiomas.
2. Supón que tu idioma empieza a dividirse hoy en dos. Si el principio de la glotocronología se mantiene en el transcurso del tiempo, ¿qué porcentaje de palabras básicas compartirán en 13 000 años?
3. ¿Por qué es importante la preservación de las lenguas indígenas?

Si quieres conocer más acerca de la clasificación y el origen de las lenguas indígenas en nuestro país, entra a

www.inali.gob.mx/clin-inali/

Las ecuaciones sirven para resolver problemas muy variados; incluso ayudan a estudiar aspectos aparentemente tan lejanos a las matemáticas como la evolución de las lenguas.

En este bloque aprenderás a resolver problemas diversos utilizando ecuaciones de segundo grado, así como a leer y elaborar gráficas de este tipo de ecuaciones.

BLOQUE 3

Secuencia 1 / lección 40

Una fórmula útil

CONTENIDO

Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Ya aprendiste a resolver ecuaciones de segundo grado mediante tanteo y factorización. ¿Hay otras técnicas? Claro que sí. La fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. La estudiarás en esta secuencia.

1. Analiza, en equipo, el siguiente problema. Hagan lo que se indica.

Dos veces el cuadrado de un número más tres veces el mismo número, más nueve unidades da 44. ¿Qué números cumplen estas condiciones?

a) Formulen una ecuación con la que se resuelva el problema.

$2x^2 + 3x + 9 = 44$

b) Rescríbanla en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$.

$2x^2 + 3x - 35 = 0$

c) Anoten los valores de a, b y c. Verifíquenlos con ayuda del profesor.

$a =$ 3 $b =$ 3 $c =$ −35

d) Para encontrar las soluciones de la ecuación, sustituyan, en la fórmula general, a, b y c por sus valores correspondientes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-35)}}{2(2)}$$

e) Hagan las operaciones indicadas en la fórmula general. Si hicieron todo bien, encontrarán dos valores para x.

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-3 \pm 17}{4}$$

f) ¿Cuáles son las dos soluciones de la ecuación?

$x_1 =$ −5 $x_2 =$ 3.5

g) Verifiquen que las soluciones cumplan las condiciones del problema.

* Con ayuda del profesor comparen sus resultados con los de sus compañeros.
Si hay diferencias, identifiquen los errores y corrijan lo necesario. Recuerden que han encontrado el resultado correcto si los números encontrados cumplen las condiciones establecidas.

sm

2. **Analicen los siguientes problemas. Formulen, para cada uno, la ecuación correspondiente y resuélvanla con la fórmula general. Anoten la solución de cada problema.**

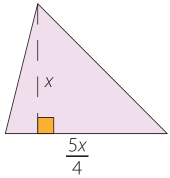
resolver

a) Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho. Si el largo aumenta 40 m y el ancho, 6 m, el área se duplica. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno original?

Ecuación: R. T. $2x^2 - 52x - 240 = 0$

Dimensiones del terreno original: 30 m y 60 m

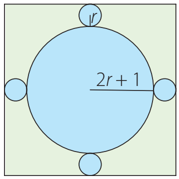
b) Si el área del siguiente triángulo es 10 cm², ¿cuál es el valor de x?



Ecuación: R. T. $5x^2 = 80$

Medida de la altura: $x =$ 4 cm

c) En la figura de la derecha, el radio del círculo más grande mide 1 cm más que el doble de cada radio pequeño. Si él área del cuadrado es 16 cm², ¿cuánto mide el radio de cada círculo?



También puede resolverse sin la fórmula general. El lado del cuadrado mide 4 cm, esto es igual a dos diámetros pequeños más uno grande, entonces $8r + 2 = 4$; $r = 0.25$

Ecuación: R. T. $64r^2 + 32r - 12 = 0$

Radio pequeño: $r =$ 0.25 cm

Radio grande: $2r + 1 =$ 1.5 cm

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. En particular, comenten por qué en el tercer inciso sólo una de las dos soluciones de la ecuación resuelve el problema satisfactoriamente.**

3. **Utiliza el método que creas conveniente para resolver las siguientes ecuaciones.**

técnicas

a) $0.5x^2 + 1.5x - 2 = 0$ $x = 1, -4$

b) $3r^2 + 1 = 4r$ $r = 1, \frac{1}{3}$

c) $2t(t + 3) + 3 = 0$ $-1.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -1.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4a^2 = 2a + 3$ $\frac{1 + \sqrt{13}}{4}, \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$

e) $0.75p^2 - 1.75p + 0.5 = 0$ $2, \frac{1}{3}$

f) $-h(h - 3) + 1 = 4h - 1$ $-2, 1$

g) $(2y - 1)^2 = 0$ $1/2$

h) $-0.5(n + 2)^2 = 0$ -2

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros; si algunas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Comenten por qué las ecuaciones de los incisos g) y h) se resuelven fácilmente, sin necesidad de usar la fórmula general.**

¿Cuántas soluciones?

CONTENIDO Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

técnicas

1. Trabaja en equipo. Resuelvan, en su cuaderno y con el método que deseen, las siguientes ecuaciones. Después completen la tabla.

Ecuación	Soluciones	Valores de los coeficientes	Valor de $b^2 - 4ac$	¿Cuántas soluciones hay?
$3x^2 - 5x - 2 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{3}$ $x_2 = 2$	$a = 3$ $b = -5$ $c = -2$	49	Dos.
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x_1 = -1$ $x_2 = -1$	$a = 1$ $b = 2$ $c = 1$	0	Una.
$4x^2 - 3x + 1 = 0$	$x_1 =$ ---- $x_2 =$ ----	$a = 4$ $b = -3$ $c = 1$	-7	Ninguna.
$-4x^2 + 1 = 0$	$x_1 = 0.5$ $x_2 = -0.5$	$a = -4$ $b = 0$ $c = 1$	0	Dos.
$x^2 - 5x = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = 5$	$a = 1$ $b = -5$ $c = 0$	25	Dos.
$4x^2 + 6x = -9$	$x_1 =$ ---- $x_2 =$ ----	$a = 4$ $b = 6$ $c = 9$	-108	Ninguna
$x - 3x^2 = 1$	$x_1 =$ ---- $x_2 =$ ----	$a = -3$ $b = 1$ $c = -1$	-11	Ninguna
$x^2 = -1$	$x_1 =$ ---- $x_2 =$ ----	$a = 1$ $b = 0$ $c = 1$	-4	Ninguna

* Comenten, con ayuda del profesor, sus resultados de la tabla. Discutan cuál debe ser el valor de $b^2 - 4ac$ para que las ecuaciones de segundo grado tenga dos soluciones, una solución o no tengan solución. Después lean la información y completen lo siguiente.

La expresión $b^2 - 4ac$, que aparece dentro de la raíz en la fórmula general, recibe el nombre de **discriminante**, y su valor puede ser 0, mayor que 0 o menor que 0.

» Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución.
» Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones.
» Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

2. **Plantea una ecuación para cada problema y, sin resolverla, escribe cuántas soluciones tiene la ecuación.**

a) Un número elevado al cuadrado da como resultado –4. ¿Qué número es?

Ecuación: R. T. $x^2 + 4 = 0$ Discriminante: –16

Número de soluciones: 0

b) Un número se multiplica por 9, al producto se le suma el cuadrado del mismo número y se obtiene como resultado –16. ¿De qué número se trata?

Ecuación: R. T. $x^2 + 9x + 16 = 0$ Discriminante: 17

Número de soluciones: 2

c) Si al doble del cuadrado de un número se le suma seis veces ese mismo número, se obtiene –4. ¿Qué número es?

Ecuación: R. T. $2x^2 + 6x + 4 = 0$ Discriminante: 4

Número de soluciones: 2

3. **Identifica, sin resolverlas, cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución; para las que sí la tengan, escribe en tu cuaderno un problema que corresponda a la ecuación y resuélvelo.**

a) $2x^2 + x$ ✔ $1 = 0$ 1, –0.5 b) $-x^2 + 3x$ ✘ $4 = 0$ No hay c) $-x^2$ ✔ $4x = 0$ 0, 4

d) $0.5x^2$ ✘ $2 = 0$ No hay e) $\frac{x^2}{4} + 2x$ ✔ $4 = 0$ –4 f) $-x^2 + x$ ✔ $2 = 0$ 2, –1

4. **Inventa ejemplos de ecuaciones de segundo grado completas, que cumplan los siguientes criterios…**

a) Con dos soluciones: R. P.

b) Con una solución: R. P

c) Sin solución: R. P.

Ya sabemos...

La forma general de la ecuación de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$. Si falta el segundo término (bx) o el tercero (c), se trata de una ecuación incompleta.

✹ **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Respondan lo siguiente, consideren que todas las variables son números positivos.**

a) ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$? 2

b) ¿Y una del tipo $ax^2 + c = 0$? Ninguna

c) ¿Qué valor debe tener k en la ecuación $x^2 - kx + 4 = 0$ para que las dos soluciones de la ecuación sean iguales? $k = 4$

BLOQUE 3

Secuencia 1 / lección 42

Algunos problemas

CONTENIDO

Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

resolver

Convivimos

Cuando trabajen en equipo, pregúntense: "¿La solución es única o hay otras?", o "¿De qué otra manera se resolvería?". Al hacerlo, tal vez se sorprendan al descubrir procedimientos más sencillos o ingeniosos, propuestos por ti o por tus compañeros.

conect@mos

Resuelve problemas usando ecuaciones cuadráticas en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/tiro_parabolico/actividad.html

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

1. Trabaja en equipo. Hagan lo siguiente en cada problema.

» Formulen una ecuación con la que se resuelva el problema.
» Determinen las soluciones.
» Comprueben que éstas cumplan las condiciones establecidas.

Primer problema. Al abrir un libro, descubro que el producto que se obtiene al multiplicar los números de página de las dos páginas que estoy viendo es 9 312. ¿Qué páginas son?

Las páginas son 96 y 97

Segundo problema. En un triángulo rectángulo, el cateto largo mide 7 unidades más que el corto; a su vez, la hipotenusa mide 1 unidad más que el cateto largo. ¿Qué área tiene dicho triángulo?

30 u^2

Tercer problema. Se buscan tres números impares consecutivos con la siguiente característica: si al cuadrado del número mayor se le restan los cuadrados de los otros dos, se obtiene 7. ¿Cuáles son los tres números?

5, 7 y 9 o bien –1, 1, 3.

Cuarto problema. La suma de dos números da 12 y la de sus cuadrados, 74. ¿Qué números son?

5 y 7.

Quinto problema. Juan compra y vende mercancía con base en el siguiente criterio: si un artículo le cuesta \$10.00 gana 10% al venderlo; si le cuesta \$30.00, 30%; y si le cuesta \$48.00, 48%. Si vendió un artículo en \$56.00, ¿cuánto le costó?

Le costó \$40.00

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados con los de tus compañeros. Discutan en qué casos las dos soluciones de la ecuación resuelven el problema.

2. Armen, usando los datos expresados en las etiquetas, las ecuaciones que resuelven cada problema anterior. Busquen el primero y el segundo miembro de cada ecuación, y escríbanlos en la tabla.

técnicas

- $x(x + 1)$
- 9312
- $(x + 5)^2 - (x + 3)^2 - (x + 1)$
- 56
- $x^2 + (x + 7)^2$
- 7
- $x^2 + (12 - x)^2$
- $(x + 8)^2$
- 74
- $x + (\frac{x}{100})x$

Problema	Primer miembro		Segundo miembro	Forma general de la ecuación
1°	$x(x + 1)$	=	9312	$x^2 + x - 9312 = 0$
2°	$x^2 + (x + 7)^2$	=	$(x + 8)^2$	$x^2 - 2x - 15 = 0$
3°	$(x + 5)^2 - (x + 3)^2 - (x + 1)^2$	=	7	$-x^2 + 2x + 8 = 0$
4°	$x^2 + (12 - x)^2$	=	74	$2x^2 - 24x + 70 = 0$
5°	$x + (\frac{x}{100})x$	=	56	$\frac{x^2}{100} + x - 56 = 0$

3. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas y anota junto a cada uno la respuesta.

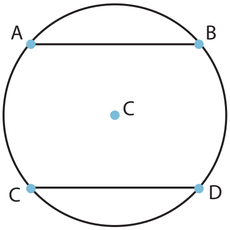
resolver

a) Si al triple del cuadrado de un número se le resta tres veces el mismo número, y al resultado se le suma 8, se obtiene 68. ¿Cuál es ese número? 5

b) La suma de las áreas de tres cuadrados es 418 m^2. El lado del cuadrado más grande mide 3 m más que el del mediano; y el lado del mediano mide 5 m más que el del chico. ¿Cuánto miden los lados de cada cuadrado? 7 m, 12 m y 15 m

c) En un círculo, la distancia entre dos cuerdas paralelas congruentes es de 12 cm. Cada una mide 6 cm más que el radio. Determina el radio.

El radio mide 10 cm.



✷ Comenta tus resultados con tus compañeros. En caso de haber diferencias, identifiquen los errores y corrijan lo necesario.

BLOQUE 3

Secuencia 2 / lección 43

Congruencia y cuadriláteros

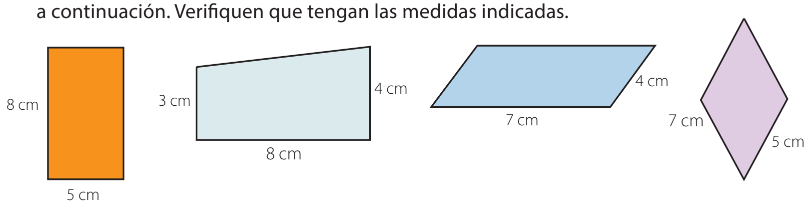
CONTENIDO Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

¿Has usado la congruencia de triángulos para justificar o deducir alguna propiedad de las figuras geométricas? ¿O la semejanza de triángulos para calcular alturas inaccesibles? En esta secuencia aprenderás a dar diferentes usos a la congruencia y la semejanza.

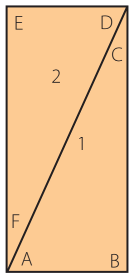
Ya sabemos...

Los triángulos son figuras muy útiles para deducir y probar propiedades de otras figuras geométricas. Por ejemplo, para justificar que en todo cuadrilátero la suma de sus ángulos internos es 360°, basta tener en cuenta que cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos, y que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

1. Trabaja en equipo. Reproduzcan en una hoja de papel los cuadriláteros que se muestran a continuación. Verifiquen que tengan las medidas indicadas.



a) En cada uno tracen una diagonal, de acuerdo con el ejemplo en el rectángulo de la derecha. Marquen los vértices como se indica. Numeren los triángulos que se formen.



b) Recorta por la línea que trazaste y sobrepón los triángulos de manera que sus lados coincidan. Si esto se cumple, los triángulos son congruentes. Con base en el triángulo 2 de la figura derecha, ¿qué lado mide lo mismo que el segmento… en el triángulo 1?

» $\overline{AB}$? ED $\overline{AC}$? FD $\overline{BC}$? EF

Contesta, en tu cuaderno y para los cuadriláteros en que se forman triángulos congruentes, las preguntas del inciso b).

c) Indica en qué cuadriláteros se forman triángulos congruentes y en cuáles no.

Sí se forman en el rectángulo, romboide y rombo

d) ¿Qué propiedad tienen en común los lados de los cuadriláteros en que se forman triángulos congruentes, que no tienen los otros?

R. T. Los lados opuestos son paralelos o los ángulos opuestos son iguales.

Reflexionamos

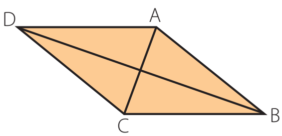
En todo paralelogramo los lados opuestos miden lo mismo. ¿Por qué?

Una pista

En un paralelogramo los lados opuestos son paralelos.

comunicar

2. En el paralelogramo de la izquierda se trazaron las diagonales y se rotularon los vértices con letras.



a) Encuentra un triángulo congruente con el triángulo **ABD**. CBD ¿Qué criterio de congruencia explica esa relación? Recuerda que sólo sabes que la figura es un paralelogramo.

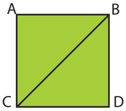
ALA

sm

b) Encuentra un triángulo congruente con el triángulo **ABC** CDA ¿Qué criterio de congruencia explica esa relación? ALA

3. **Analiza por qué, en el cuadrado de la derecha, los triángulos CAB y BCD son congruentes.** resolver

- » El segmento $\overline{AB}$ es congruente (mide lo mismo) con el segmento $\overline{CD}$.
- » Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes entre sí.
- » Los ángulos **BAC** y **BDC** miden lo mismo por ser ángulos rectos.

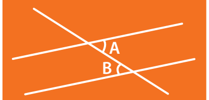


a) ¿Qué criterio de congruencia se usó para explicar esa relación? LAL

b) Determina, con la información inferida a partir del cuadrado, al menos otro criterio de congruencia para afirmar que los triángulos son congruentes. ¿Cuál es? LLL Explica por qué. R. P.

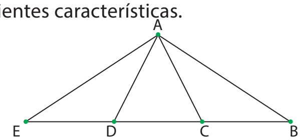
Una pista

Los ángulos alternos internos entre paralelas miden lo mismo.



4. **Observa la figura de la derecha. Ésta tiene las siguientes características.**

- » El triángulo **ABE** es isósceles.
- » D es el punto medio del segmento $\overline{CE}$.
- » C es el punto medio del segmento $\overline{BD}$.



a) Sin dibujar, justifica con alguno de los criterios de congruencia, que los triángulos **AEC** y **ABD** son congruentes. R. T. LAL. ED = DC y CB = DC, entonces EC = DB. AE y AB miden los mismo porque ABE es isósceles y, por la misma razón, los ángulos BEA y EBA miden lo mismo.

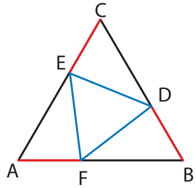
b) Traza un triángulo isósceles distinto al anterior y verifica tu respuesta.

Una pista

En los triángulos isósceles, los ángulos de la base miden lo mismo.

5. **En la figura de la derecha, el triángulo ABC es equilátero, y los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son congruentes.**

Encuentra tres triángulos congruentes y explica por qué lo son. Los segmentos AF, BD y CE miden lo mismo, entonces, debido a que los tres lados del triángulos son iguales, los segmentos FB, DC y EA miden lo mismo. Los ángulos CAB, ABC y BCA miden lo mismo. Por LAL los triángulos AFE, BDF y CED son congruentes entre sí.



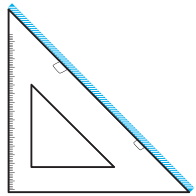
✹ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten cómo llegaron a ellas.

Secuencia 2 / lección 44

¿Cuánto mide el poste?

CONTENIDO: Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

1. Trabaja en equipo. Sigan las instrucciones para elaborar el siguiente aparato, con el cual medirán distancias de manera aproximada (por ejemplo, la altura de un árbol, de un asta bandera o de un edificio).

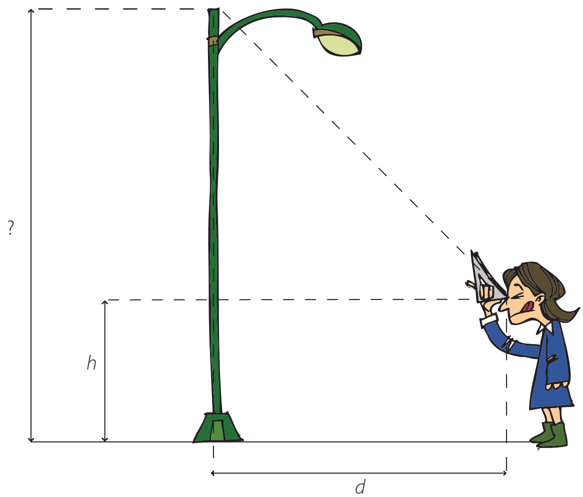


a) Peguen un popote en el lado más largo de la escuadra que tiene forma de triángulo rectángulo isósceles.

b) Elijan un objeto alto; por ejemplo, un árbol, un poste o un asta bandera. Hagan lo siguiente para medir su altura.

» Uno de ustedes mire por el orificio del popote, manteniendo uno de los lados pequeños de la escuadra en posición horizontal. Desplácese hacia atrás o hacia adelante hasta que ubique el punto más alto del objeto que medirán.

» Otro de ustedes, con un metro o una cinta métrica, mida la distancia (*d*) que hay entre la escuadra y el objeto que medirán, y la altura (*h*) a la que se encuentra la escuadra, como se ve en la imagen.



» Busquen, con esos datos, una manera de calcular la altura del objeto seleccionado.

Anótenla aquí. Se forma un triángulo rectángulo en el que $d = ? - h$

La altura buscada es $h + d$

✷ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Al finalizar, completen el siguiente procedimiento para calcular la altura de un poste. Es probable que algún equipo haya hecho algo similar en la actividad anterior.



En contexto

El teodolito es un instrumento que tiene diferentes usos en el campo de la topografía; entre ellos destaca la medición de distancias por taquimetría o estadía, es decir, el cálculo de distancias sin medirlas directamente.

a) Observen el triángulo **ABC**. Éste es semejante a la escuadra. ¿Por qué?

R. T. Porque sus ángulos correspondientes son iguales

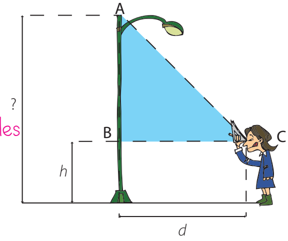
b) Si es semejante, entonces, ¿qué tipo de triángulo es **ABC**? Triángulo rectángulo isósceles

c) ¿Cuáles son los lados iguales en el triángulo **ABC**? BC y AB

d) ¿A qué lado del triángulo **ABC** corresponde la distancia *d*? BC

e) Si *d* mide 3 m, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? 3 m

f) Si la escuadra se colocó a 1.50 m del piso (*h*), ¿cuál es la altura del poste? 4.5 m



2. Resuelve los siguientes problemas.

resolver

a) Un equipo midió, con su escuadra, la altura de un árbol. Al hacerlo averiguó que $d = 4.20$ m y $h = 1.55$ m. ¿Cuánto mide el árbol? 4.2 m + 1.55 m = 5.75 m

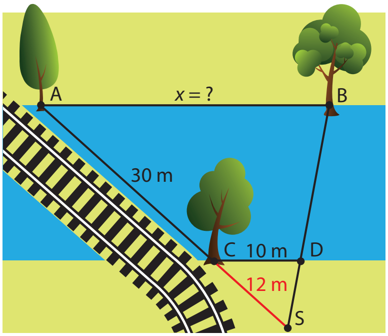
b) Una escuadra se ha colocado a una altura (*h*) de 1.60 m del piso y con ella se ve la punta de un poste de 4 m. ¿Cuál es el valor de la distancia *d*? 4 m – 1.6 m = 2.4 m

c) En la imagen de los árboles, los segmentos **AB** y **CD** son paralelos.

» ¿Qué triángulos semejantes identificas?

ABS y CDS

» ¿Qué distancia hay entre los árboles A y B? $x =$ 35 *m*



3. Trabaja en equipo. Usen su escuadra para calcular alguna altura inaccesible distinta de la que calcularon en la actividad 1.

conect@mos

Aprende más sobre semejanza de triángulos en

tutormatematicas.com/archivoCAR/Interactivo_Semejanza_Triangulos_Factor_Escala.html

Lee la información que se presenta. Al finalizar, explica en tu cuaderno cómo se relacionan las figuras semejantes y los dibujos a escala.

Calcular distancias

CONTENIDO Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

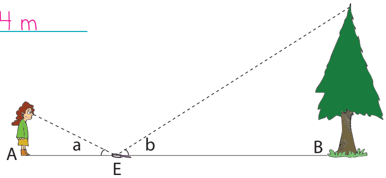
resolver

Una pista

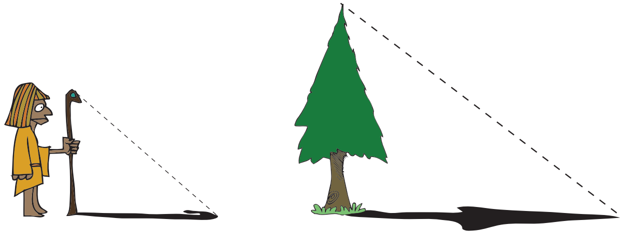
Encuentra los triángulos semejantes en cada situación.

1. Resuelve, en equipo, los siguientes problemas.

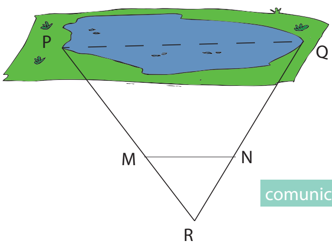
a) Para medir la altura del árbol, una mujer colocó un espejo en el piso, a 30 m del árbol (punto **E**); en éste se refleja la punta del árbol. Se sabe que los ángulos **a** y **b** miden lo mismo. Si $\overline{AE}$ = 2 m y los ojos de la mujer están a 1.60 m del piso, ¿cuál es la altura del árbol? 24 m



b) La vara de un hombre mide 1.5 m de altura y la sombra, 1.8 m. Si la sombra del árbol mide 3 m y los rayos de sol son paralelos, ¿cuál es la altura del árbol? 2.5 m



c) Para medir la parte más ancha de una laguna (**PQ**) se pusieron cuerdas **PR**, **QR** y **MN** con el fin de formar los triángulos **PQR** y **MNR**, de manera que $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{PQ}$.

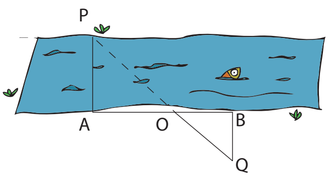


Si $\overline{PR}$ = $\overline{QR}$ = 50 m, $\overline{PM}$ = $\overline{QN}$ = 30 m y $\overline{MN}$ = 20 m, ¿cuál es el ancho de la laguna? 50 m

- Comparen sus resultados con los de sus compañeros.

comunicar

2. Analicen el diagrama inferior de la izquierda y anoten cómo podría medirse el ancho de un río ($\overline{PA}$).



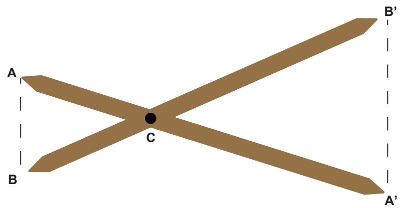
R. T. Mediante la semejanza de los triángulos QBO y POA.

Si $\overline{AO}$ = 15 m, $\overline{OB}$ = 10 m y $\overline{BQ}$ = 9 m, ¿cuál es el ancho del río? 13.5 m

- Comparen sus respuestas de la actividad anterior. Comenten qué triángulos semejantes usaron para resolver el problema y cómo dedujeron que debían usarlos.

3. Lee la información y contesta.

Un *compás de escala* es un instrumento que sirve para reducir o amplificar figuras a una escala determinada. Puede construirse con dos palos del mismo tamaño que terminen en punta en ambos lados. Estos se sujetan por el punto **C**, como se muestra en la figura, cuidando que se cumplan las igualdades $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{CA'} = \overline{CB'}$, y uniéndolos de modo que el compás pueda abrirse y cerrarse.



a) En este compás se aplica la semejanza de triángulos. ¿Qué triángulos son semejantes en él? ABC y A'B'C

¿Cómo se sabe que son semejantes? R. T. Por LAL. Son triángulos isósceles, y los ángulos opuestos (ACB y A'CB') son iguales.

b) Se ha construido un compás con dos palos de 15 cm, sujetados de modo que $\overline{AC} = \overline{BC} =$ 5 cm, y $\overline{CB'} = \overline{CA'} =$ 10 cm.

» Cuando se abre el compás hasta que la parte $\overline{AB}$ mide 8 cm, ¿cuánto mide la parte $\overline{A'B'}$? 16 cm

» Si $\overline{A'B'}$ se abre a 20 cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? 10 cm

» Y si $\overline{AB}$ mide *x* cm, ¿cuánto mide $\overline{A'B'}$? $2x$

» ¿Qué razones de semejanza se usan en este compás? R. T. $\frac{1}{2}$ y 2; es decir, los lados del triángulo pequeño miden la mitad de los del grande.

c) Se desea construir un compás de escala que permita hacer ampliaciones 3 a 1 o reducciones 1 a 3. Anota la posible medida de los palos, y dónde deben unirse (punto C).

R. T. Palos de 20 cm, unidos en C a 5 cm de un extremo

Comenta tus respuestas con tus compañeros. Inventen un problema relacionado con alturas inaccesibles, que pueda resolverse mediante semejanza de triángulos.

R. P.

BLOQUE 3

Secuencia 3 / lección 46

Paralelas y segmentos proporcionales

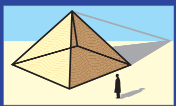
CONTENIDO

Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

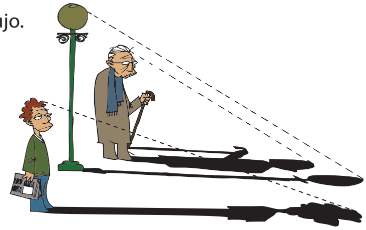
¿Has observado la sombra de los objetos? ¿Has escuchado la frase "los rayos del sol caen de forma paralela"? Aunque no lo consideres así, esto se relaciona con las matemáticas y, en particular, con las figuras semejantes y la proporcionalidad de segmentos. En esta secuencia conocerás el teorema de Tales, uno de los más importantes de la geometría, y aprenderás a usarlo para calcular distancias.

En contexto

Desde la Antigüedad se ha usado el método de sombras para calcular alturas difíciles de medir directamente. Se cree que el matemático y filósofo griego Tales de Mileto calculó de esta manera la altura de una pirámide egipcia en el año 600 a. C.



1. Trabaja en equipo. Observen el dibujo.

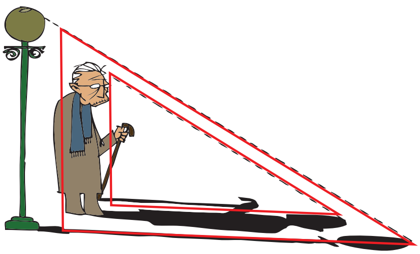


a) ¿Qué sombra está mal dibujada? La del joven

b) ¿Cómo lo sabes? R. T. Es casi tan larga como la sombra del faro, pero el faro es mucho más alto.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Después comenten la siguiente información con ayuda del profesor.

Las sombras de los objetos los alargan o acortan, pero conservan sus proporciones, es decir, las razones entre las longitudes del objeto original (el doble, el triple…) son iguales a las razones entre las longitudes de la sombra. En otras palabras, la sombra es una copia a escala del objeto.



2. Observa los triángulos rojos del dibujo.

a) ¿Son semejantes? Sí ¿Cómo lo sabes? R. T. Por AAA

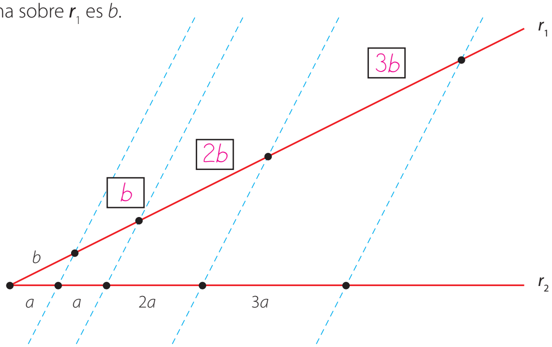
b) ¿Sus lados son proporcionales? Sí ¿Cómo lo sabes? R. T. Porque son triángulos semejantes.

c) ¿Serían semejantes si los rayos del sol no fueran paralelos? No

¿Por qué? R. T. Cambiarían los ángulos correspondientes, ya no serían de la misma medida.

3. En el siguiente dibujo, dos rectas, r_1 y r_2, están cortadas por un haz de rectas paralelas. Éstas no están a la misma distancia entre sí.

Los segmentos que se forman sobre r_2 miden a, a, $2a$ y $3a$. La medida del primer segmento que se forma sobre r_1 es b.

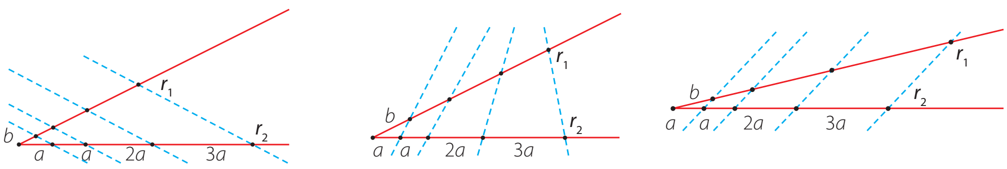


Entre las siguientes medidas, selecciona y anota en los recuadros superiores las que corresponden a la recta r_1.

$3a$ $2a$ $5b$ $3b$ $2b$ b a

4. Trabaja en pareja. Verifiquen sus respuestas anteriores midiendo los segmentos. Noten que los segmentos que se forman sobre r_1 no miden lo mismo que los segmentos que se forman sobre r_2, pero sí son proporcionales, es decir, la razón que guardan se conserva. Determinen por qué sucede esto.

- » ¿Ocurriría lo mismo si las rectas paralelas tuvieran una inclinación distinta? Sí
- » ¿Y si las rectas que cortan a r_1 y r_2 no fueran paralelas? No, ya no se conserva la razón.
- » ¿Y si las rectas r_1 y r_2 formaran un ángulo distinto? Sí



- Comenten sus respuestas con el grupo. Después lean la siguiente información y compárenla con lo trabajado en esta lección.

En esta lección has estudiado el **teorema de Tales**: si tres o más paralelas cortan dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

Una pista

Busca triángulos semejantes. Recuerda que los ángulos correspondientes entre paralelas miden lo mismo.

En contexto

Tales de Mileto vivió en la ciudad de Mileto entre 624 y 546 a. C. Fue uno de los Siete Sabios de la antigüedad. Se tiene información acerca de sus escritos y su vida apenas por referencias de otros autores. Fue filósofo de la escuela jónica y autor de una cosmología de la que sólo conocemos fragmentos. Se destacó principalmente por sus trabajos en filosofía y matemáticas. En esta última ciencia se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, por lo que se le considera el padre de la geometría.

BLOQUE 3

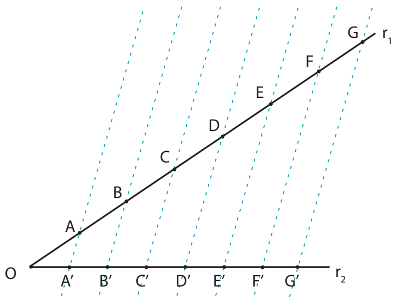
Secuencia 3 / lección 47

El teorema de Tales y sus aplicaciones

CONTENIDO

Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

1. Trabaja con un compañero. Resuelvan la actividad, sin medir. En la siguiente figura, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$, que están sobre la recta $\mathbf{r}_1$, miden lo mismo. Los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$ y $\overline{GG'}$ son paralelos entre sí.



a) Marquen la afirmación correcta con ✔.

- [ ] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ miden lo mismo y son iguales a los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$.
- [x] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ son iguales entre sí, pero no miden lo mismo que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$.
- [ ] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ no miden lo mismo entre sí.

b) Tracen otra recta ($\mathbf{r}_3$) que inicie en el punto **O** y sea cortada por las paralelas. ¿Qué ocurre con los segmentos que se forman sobre $\mathbf{r}_3$? ____

R. T. Los segmentos que se forman en r_3 miden lo mismo

c) Expliquen lo anterior. El teorema de Tales puede servir para su explicación. R. T. Los segmentos en r_3 son proporcionales a los de r_1; como los de r_1 miden los mismo entre sí, los de r_3 también.

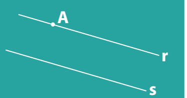
d) Midan los segmentos con su regla para verificar sus respuestas.

Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Lean, con el profesor, lo siguiente.

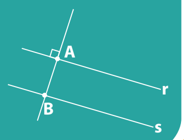
Toda recta cortada por un haz de paralelas equidistantes (que están a la misma distancia entre sí) queda dividida en segmentos que miden lo mismo.

Ya sabemos...

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, s y r, se ubica un punto en una de ellas, por ejemplo, A sobre la recta r.



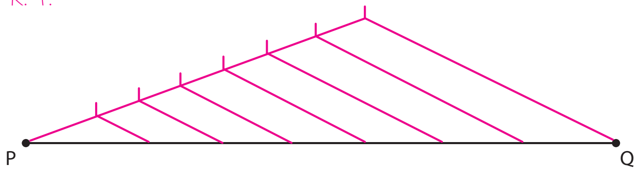
Después se traza una perpendicular a r que pase por A hasta intersecar a s. La medida del segmento $\overline{AB}$ es la distancia entre las rectas r y s.



2. Trabaja con un compañero. Efectúen lo siguiente.

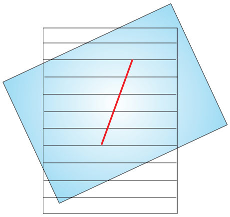
resolver

a) Dividan el siguiente segmento en siete partes iguales. Háganlo sin medir con regla. Para ello, analicen la figura de la actividad 1 y las relaciones que hay entre los segmentos.
R. T.



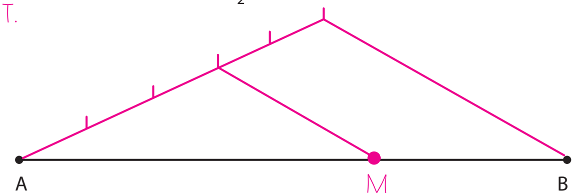
Una estrategia para dividir un segmento en partes iguales sin medir con regla es usar una hoja rayada. En el ejemplo inferior, el segmento rojo dibujado en la hoja azul se dividió en cinco partes iguales.

validar



b) Explica por qué funciona esta técnica. R. T.
Porque las rayas son paralelas y son equidistantes. Al cortar al segmento rojo en 5 partes, esas partes son equidistantes también

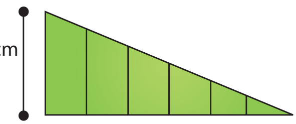
c) Señalen, sin medir con regla, el punto **M**, de modo que la razón del segmento $\overline{\mathbf{AM}}$ respecto al segmento $\overline{\mathbf{MB}}$ sea $\frac{3}{2}$.
R. T.



Una pista

¿En cuántas partes iguales hay que dividir el segmento?

3. El dibujo de la derecha representa un pedazo de reja. Los barrotes son paralelos y equidistantes.



a) ¿Cuánto mide el barrote más pequeño? 10 cm

b) Justifica tu respuesta. R. T. El triángulo pequeño (en la punta) es semejante al grande y la razón de semejanza es $\frac{1}{6}$.

Una pista

Con el teorema de Tales es posible saber que en la figura hay varios triángulos semejantes. Cuando dos de ellos son semejantes y se conoce las medidas de uno y la razón de semejanza, se deducen las medidas del otro.

* Comenta tus respuestas y procedimientos con tus compañeros. Resuman, en su cuaderno y de manera grupal, las utilidades que tiene el teorema de Tales.

BLOQUE 3

Secuencia 3 / lección 48

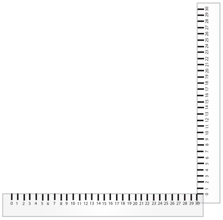
Triángulos, hilo, palillos y algo más I

CONTENIDO Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

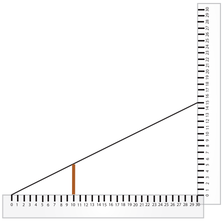
1. Trabaja en equipo. Para las actividades de esta lección y la siguiente necesitarán dos reglas de 30 cm (pueden elaborarlas con cartulina), un hilo resistente y palillos (pueden sustituir estos últimos por popotes delgados o tiras de cartón), que midan lo siguiente.

A: 5 cm	B: 6 cm	C: 8 cm	D: 10 cm
E: 12 cm	F: 15 cm	G: 16 cm	H: 20 cm

Coloquen las reglas sobre una superficie plana, como se indica en la primera imagen de la derecha. Es importante que el número 30 de la regla horizontal coincida con el 0 de la vertical. Procuren que las reglas no se muevan; si es posible, péguenlas a la superficie con cinta adhesiva.



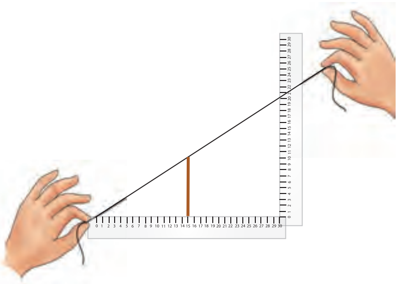
Para efectuar las actividades, sujetarán un palillo en posición vertical, según se indique. También colocarán el hilo para formar un triángulo con las reglas: desde el 0 de la regla horizontal, pasando por el extremo superior del palillo, hasta tocar algún punto de la regla vertical.



técnicas

a) Coloquen el palillo **A** en la marca de 10 cm de la regla horizontal, como en la segunda figura de la derecha.

Al colocar el hilo, ¿a qué número llega éste en la regla vertical? 15 cm



b) Coloquen ahora el mismo palillo en la marca de 15 cm de la regla horizontal.

¿A qué número llegó el hilo en la regla vertical? 10 cm

c) ¿A qué número llega el hilo al colocar el mismo palillo en la marca de 20 cm? 7.5 cm

d) ¿Qué palillo se colocó en la marca de 15 cm si el hilo llega a 20 cm en la regla horizontal? Para responder, considera la tercera figura. El palillo D

2. Hagan lo siguiente.

resolver

Una pista

Usa el teorema de Tales para determinar cómo son los segmentos.

a) Completen la tabla antes de colocar el palillo y el hilo junto a las reglas. Consideren, en todos los casos, el palillo **D**, de 10 cm.

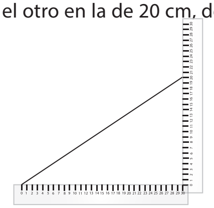
Posición del palillo D en la regla horizontal	10 cm	12 cm	20 cm	25 cm
Predicción: ¿a qué punto llegará el hilo en la regla vertical?	30 cm	25 cm	15 cm	12 cm

b) Verifiquen sus respuestas usando las reglas, el hilo y el palillo. Si identifican algún error, averigüen qué lo ocasionó y corríjanlo.

- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Tengan en cuenta que las medidas que obtuvieron son siempre aproximaciones, pues es inevitable cometer pequeños errores de medición. Por tanto, acuerden, con el profesor, un margen de error aceptable.

3. Trabaja en equipo. Consideren que en los siguientes casos se debe colocar un extremo del hilo en la marca de 0 cm de la regla horizontal y el otro en la de 20 cm, de la regla vertical.

a) Completen la tabla antes de usar las reglas.



Colocar un palillo en la regla horizontal a…	7.5 cm	9 cm	15 cm	12 cm	24 cm
Predicción: ¿qué palillo debe colocarse para que su extremo superior toque el hilo?	A	B	D	C	G

b) Verifiquen sus respuestas colocando los palillos en la posición que predijeron. Noten que, por medio de esta actividad, se comprueba el teorema de Tales.

» ¿Cuáles son las paralelas? Los palillos y la regla vertical

» Mencionen qué segmentos son proporcionales.

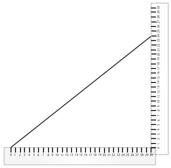
- Comenten, con el grupo, la manera en que completaron la tabla antes de usar el material. Si hay diferencias entre las predicciones y su comprobación, expliquen por qué; averigüen si es un error de cálculo o de medición.

Secuencia 3 / lección 49

Triángulos, hilo, palillos y algo más II

CONTENIDO: Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

1. Trabaja en pareja. Consideren que el hilo debe colocarse desde la marca de 0 cm de la regla horizontal hasta la de 25 cm de la regla vertical.



   a) Averigüen, sin usar su material, en qué punto se debe colocar el palillo de 5 cm para que su extremo superior toque el hilo.

   En 6 cm

   b) Completen la tabla, sin usar todavía el material.

Palillo	A: 5 cm	D: 10 cm	F: 15 cm	H: 20 cm
Predicción: lugar de la regla horizontal donde se debe colocar el palillo para que su extremo superior toque el hilo	6 cm	12 cm	18 cm	24 cm

   c) Verifiquen sus resultados usando el material.

resolver

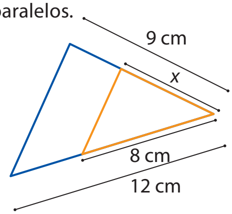
2. Coloquen los palillos que se indican sobre los puntos señalados y deduzcan a qué lugar de la regla vertical llegará el hilo. Predigan los resultados antes de usar su material.

Palillo	Punto de la regla horizontal donde debe colocarse	Predicción: punto de la regla vertical al que llegará el hilo
A: 5 cm	6 cm	25 cm
B: 6 cm	8 cm	22.5 cm
C: 8 cm	10 cm	24 cm
F: 15 cm	15 cm	30 cm
H: 20 cm	25 cm	24 cm

- Comenten cómo predijeron los resultados. Luego lean lo siguiente con ayuda del profesor.

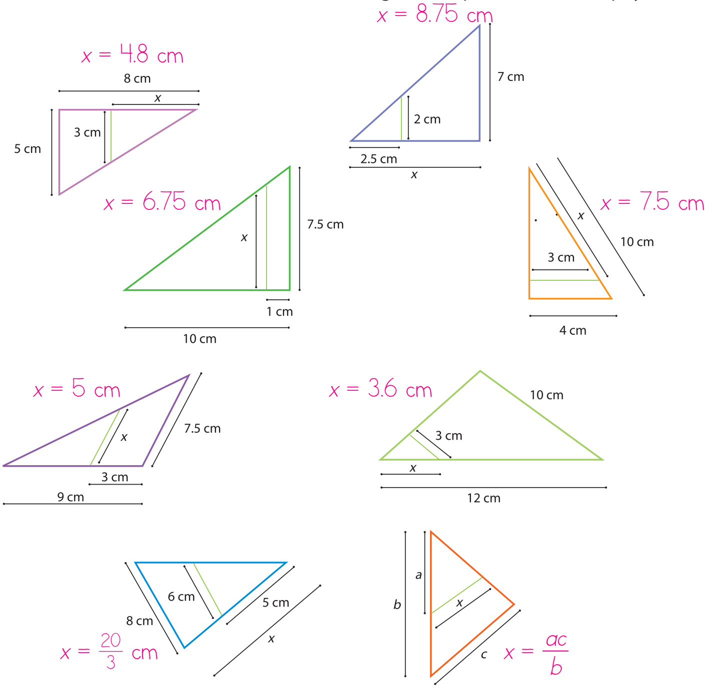
Las reglas y el hilo forman un triángulo; el palillo siempre es paralelo a uno de sus lados y forma un triángulo semejante. Se dice que dos triángulos colocados de esta manera están en "posición de Tales". En ese caso, es posible calcular datos desconocidos a partir de los que se conocen aplicando la proporcionalidad de segmentos.

3. Calcula el valor de *x* en la siguiente figura. Ten en cuenta que los lados más cortos de cada triángulo son paralelos.



- Compara tu resultado con el de tus compañeros; si hay diferencias, identifiquen el error y corrijan lo necesario. Comenten si alguien usó regla de tres y expliquen por qué es útil para resolver este tipo de problemas.

4. Calcula el valor de *x* en cada caso. Utiliza los segmentos paralelos como apoyo.



- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la siguiente información y tracen en su cuaderno dos ejemplos que la ilustren.

Si una paralela a un lado de un triángulo corta los otros dos lados (o a su prolongación), se forma un triángulo semejante al original.

conect@mos

Aprende más acerca del teorema de Tales en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/london_eye/actividad.html

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las del grupo y valídenlas.

resolver

Convivimos

¿Te parece comprensible la información del recuadro? Si entendiste lo que allí se dice, explícalo a tus compañeros; en caso contrario, ten confianza para preguntar a tu profesor.

BLOQUE 3

Secuencia 4 / lección 50

Sombras y otras proyecciones

CONTENIDO

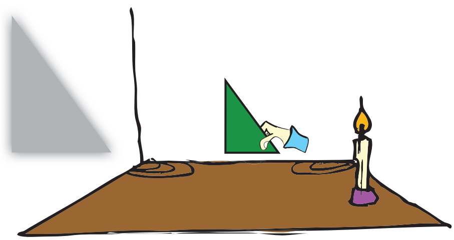
Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Ya has estudiado transformaciones geométricas en las que a cada punto del plano se le asocia otro, como la simetría central y la axial. En esta lección estudiarás otro tipo de transformación que también relaciona puntos en el plano, pero mediante el cual se agrandan o se achican las figuras: la homotecia.

1. Trabaja en equipo. Lleven a cabo esta actividad en la escuela; si no es posible, organícense para hacerla en la casa de algún integrante del equipo.

   » Recorten un triángulo rectángulo de cartoncillo, cuyos catetos (lados que forman el ángulo recto) midan 8 cm y 16 cm, respectivamente.

   » En un lugar con poca luz, pongan una vela en un candelabro sobre una mesa. Enciéndanla y coloquen el triángulo entre ella y una pared, de modo que se proyecte su sombra. La vela debe estar a 1 m de la pared.



   » Hagan lo que se indica a continuación y contesten las preguntas.

Busquen con qué posición se proyecta en la pared una sombra con la misma forma del triángulo, es decir, sin que se deforme.

Mantengan el triángulo en dicha posición. En otras palabras, no dejen de proyectar una sombra semejante al triángulo de cartoncillo.

a) ¿Qué debe hacerse para que el tamaño del triángulo proyectado aumente?

R. T. Acercar el triángulo a la vela.

b) ¿Es posible obtener la proyección de un triángulo más pequeño que el de cartoncillo?

R. T. No, siempre es más grande o de igual tamaño.

c) Verifiquen que la vela esté a 1 m de la pared. ¿A cuántos centímetros de la vela deben poner el triángulo de cartoncillo para que los lados del triángulo proyectado midan el doble de los del primero? 50 cm

Ya sabemos...

En los triángulos semejantes sus lados correspondientes son proporcionales; por tanto, conservan la misma forma, aunque cambien sus medidas.

d) ¿A cuántos centímetros de la vela deben poner el triángulo de cartoncillo para que los lados del triángulo proyectado midan el triple de los del primero?

R. T. 33.3 cm. A un tercio del camino de la vela a la pared (cerca de la vela).

2. Ahora conocerán una explicación matemática al fenómeno anterior. Consideren que la vela corresponde al punto O, y que los rayos de luz de la vela viajan en linea recta, como la que pasa por OP.

validar

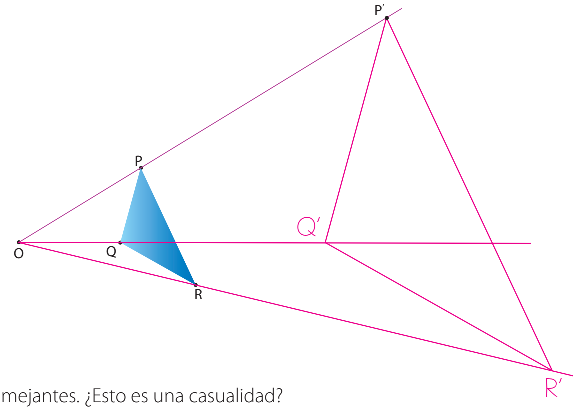
a) Hagan lo siguiente para encontrar los puntos **P'**, **Q'** y **R'**.

» Noten que se trazó una recta que pasa por los puntos **O** y **P**, y el punto **P'** se ubicó en ella de manera que $\overline{OP'}$ mida el triple de $\overline{OP}$.

» Tracen la recta que pasa por **O** y **Q**. Ubiquen **Q'** de manera que $\overline{OQ'}$ mida el triple de $\overline{OQ}$.

» Hagan lo mismo para ubicar el punto **R'**.

» Unan los puntos **P'**, **Q'** y **R'** para formar un triángulo. Éste se llama *triángulo homotético* de **PQR** con centro de homotecia **O** y razón 3 a 1.



b) Noten que los triángulos **PQR** y **P'Q'R'** parecen semejantes. ¿Esto es una casualidad? Para saberlo, consideren las siguientes parejas de triángulos.

OQP y OQ'P' OQR y OQ'R' OPR y OP'R'

» ¿Por qué son semejantes los triángulos de cada pareja? R. T. Porque las medidas de dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo entre ellos mide lo mismo.

» ¿Cuántas veces son mayores los lados de **P'Q'R'** que los de **PQR**? 3 veces.

» ¿Por qué los triángulos **PQR** y **P'Q'R'** son semejantes? R. T. Porque las medidas de los lados correspondientes son proporcionales.

✷ **Lean, con el grupo, lo siguiente. Después tracen en su cuaderno un triángulo ABC, designen un punto O fuera de él y tracen un triángulo A'B'C' homotético al ABC con centro O y razón 2 a 1.**

Una homotecia de centro **O** y de razón *r* es una correspondencia que a cada punto **P** del plano le asocia un punto **P'**, de modo que $\overline{OP'}$ = *r* veces $\overline{OP}$.

La razón de homotecia es $r = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$.

Dos figuras homotéticas siempre son semejantes.



Secuencia 4 / lección 51

Homotecias fraccionarias y negativas

CONTENIDO
Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

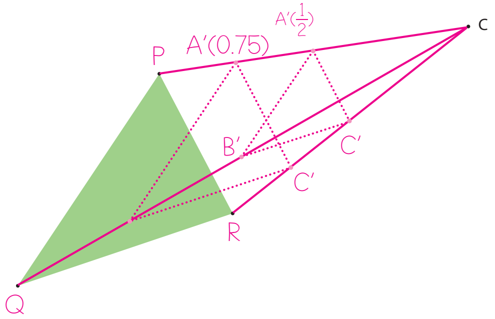
Una pista

Analiza la figura que obtuviste en la actividad 2 de la lección anterior. ¿Cómo están colocados los puntos O, P y P'? ¿Cuánto da como resultado la división de $\overline{OP'}$ entre $\overline{OP}$?

1. Trabaja en equipo. Tracen dos triángulos homotéticos al siguiente, con centro de homotecia **C** y las razones de homotecia que se indican.

   a) Razón de homotecia: $\frac{1}{2}$

   b) Razón de homotecia: 0.75

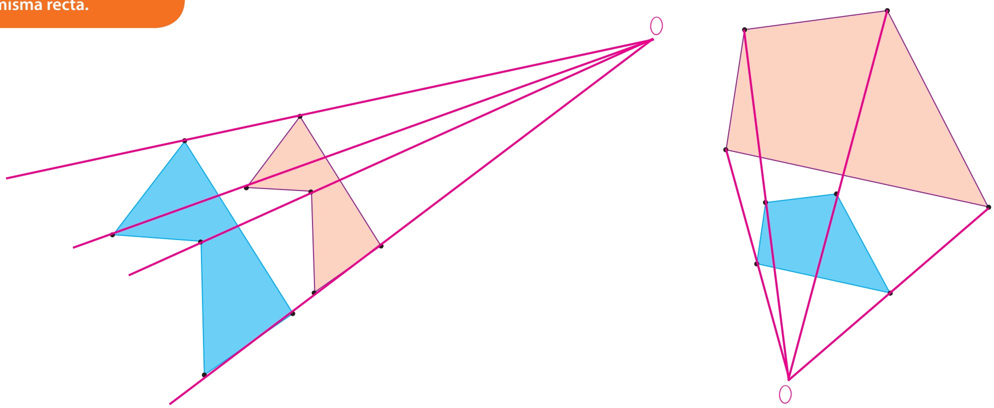


Una pista

En la lección anterior aprendiste que dos vértices correspondientes de figuras homotéticas y el centro de homotecia son colineales, es decir, están sobre una misma recta.

- Comenten con sus compañeros de grupo la manera en que efectuaron la actividad anterior.

2. Encuentra el centro de homotecia de las siguientes parejas de figuras homotéticas. Considera que la figura azul es la original.



   a) Cuando la razón de homotecia es mayor a 1, ¿la figura homotética es mayor, menor o igual que la original? Es mayor

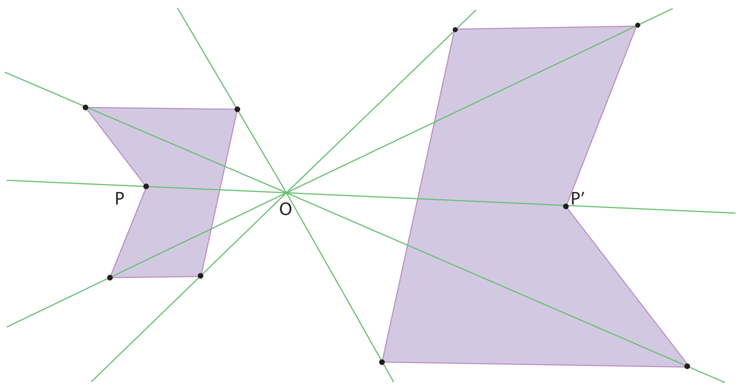
b) ¿Y si es menor a 1? Es menor

c) ¿Cuál es la razón de homotecia si la figura homotética y la original son iguales?

La razón es igual a 1

d) Traza en tu cuaderno un triángulo **ABC**, designa un punto fuera de él como centro de homotecia y traza el triángulo homotético de **ABC** con razón de homotecia igual a 1. ¿Qué observas? R. T. Los triángulos coinciden.

3. Las siguientes figuras también son homotéticas.



a) ¿En qué se parecen? R. T. Son semejantes, tienen la misma forma

b) ¿En qué son diferentes? R. T. En su orientación

c) Fíjate en que **OP** y **OP'** tienen diferente orientación. En este caso, la razón de homotecia $\frac{OP'}{OP}$ es negativa y se dice que la homotecia es inversa. ¿Cuál es la razón de homotecia? −2

Lee, con el grupo, lo siguiente. Después tracen en su cuaderno dos figuras con homotecia directa y dos figuras con homotecia inversa . Anoten, en cada caso, la razón de homotecia (con su signo correspondiente).

Cuando dos figuras homotéticas están situadas del mismo lado del centro de homotecia se dice que la homotecia es directa y la razón de homotecia es positiva. Si las figuras están colocadas en lados opuestos respecto al centro de homotecia, entonces se trata de una homotecia inversa y la razón de homotecia es negativa. En la figura anterior, la razón de homotecia es **−2**.

Secuencia 4 / lección 52

Cambiar el centro de homotecia

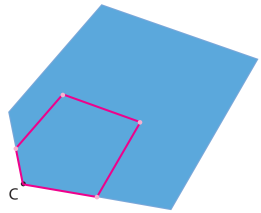
CONTENIDO Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

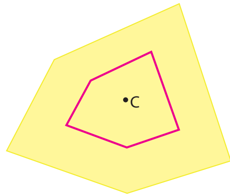
resolver

Una pista

La figura homotética puede quedar dentro de la figura original.

1. Traza, en equipo, una figura homotética. En cada caso, la razón de homotecia debe ser $\frac{1}{2}$ y su centro, el señalado con la letra **C**.





- Comparen sus figuras y procedimientos con los de sus compañeros. Discutan y resuman, entre todos, cómo cambia la posición de la figura homotética cuando el centro de homotecia…

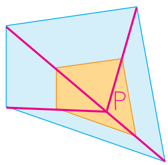
  a) es uno de los vértices de la figura. R. T. Dos lados quedan sobre dos lados de la original.

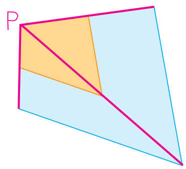
  b) está dentro de la figura. R. T. La figura homotética está dentro de la original.

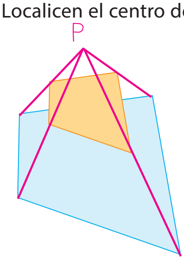
Reflexionamos

¿Cómo podemos identificar si el centro de homotecia está dentro o fuera de la figura original?, ¿o si está en uno de sus vértices?

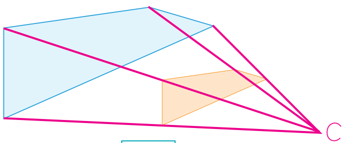
2. Trabaja en equipo. Las figuras de cada pareja son homotéticas. Localicen el centro de homotecia y nómbrenlo **P**.



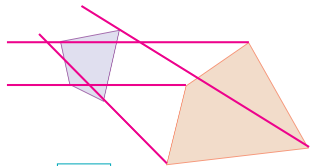




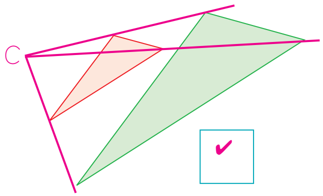
3. Las siguientes parejas de figuras son semejantes, pero no todas son homotéticas. Identifiquen las que lo sean, ubiquen y marquen el centro de homotecia, y pongan una ✔ en el recuadro.

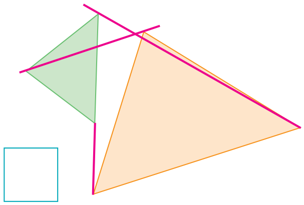


✔



☐





a) ¿Cómo identificaron las figuras que, además de ser semejantes, son homotéticas?

R. T. Las líneas que unen vértices correspondientes concurren.

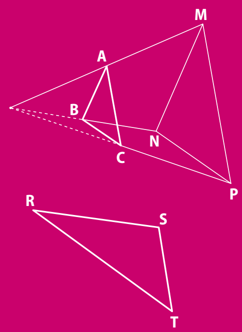
b) Anoten una ✔ en las características que correspondan a cada tipo de figuras.

Característica	Figuras homotéticas	Figuras semejantes que NO son homotéticas
Tienen lados correspondientes paralelos.	✔	
Tienen lados correspondientes no paralelos.		✔
Tienen lados correspondientes proporcionales.	✔	✔
Tienen ángulos correspondientes iguales.	✔	✔
Las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto.	✔	

- Lean y comenten, con ayuda del profesor, la información del recuadro. Después hagan lo siguiente.
  a) Tracen en su cuaderno un par de figuras homotéticas.
  b) Tracen en su cuaderno un par de figuras semejantes, pero no homotéticas.
  c) Verifiquen que sus figuras, tanto las homotéticas como las semejantes pero no homotéticas, cumplan con lo que se menciona en el recuadro.

Dos figuras **homotéticas**, además de ser semejantes, tienen lados correspondientes paralelos. Asimismo, las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto: el centro de homotecia. Cuando las figuras son semejantes, pero no homotéticas, no sucede lo anterior. Dicho en otras palabras, todas las figuras homotéticas son semejantes, pero no todas las figuras semejantes son homotéticas.

Por ejemplo, los triángulos **MNP** y **ABC** son homotéticos, pues tienen lados correspondientes paralelos, y las rectas que unen los vértices correspondientes concurren en un punto; en cambio, el triángulo **RST** sólo es semejante a los otros dos.



Secuencia 4 / lección 53

Más sobre homotecia

CONTENIDO: Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

resolver

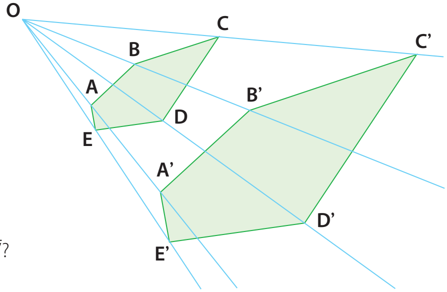
1. Traza en tu cuaderno un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 9 cm y 12 cm. Elige un punto que funcione como centro de homotecia y traza lo siguiente.

a) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a –2.

b) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a $\frac{2}{5}$.

c) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a 0.8.

2. Se quiere que los lados del polígono **A'B'C'D'E'** midan dos veces y medio lo que los lados del polígono **ABCDE**.



a) ¿Cuánto pueden medir $\overline{OE}$ y $\overline{OE'}$?

R. T. 2 y 5

b) ¿Hay una solución o varias? Varias: cualquier pareja de números en razón 5 a 2; por ejemplo, 5 y 2 o 10 y 4.

c) Argumenta tu respuesta. R. P.

3. Se desea trazar cuadrados homotéticos al siguiente.
Considera las siguientes razones de homotecia y anota **A** en el cuadrado homotético mayor; B en el que le sigue en tamaño; y así sucesivamente.

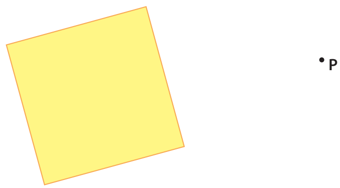
a) –3 A

b) $-\frac{6}{5}$ C

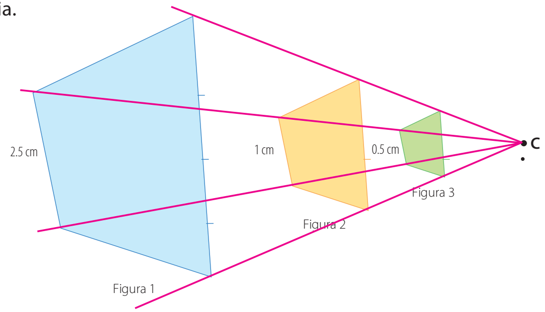
c) 0.9 E

d) 1 D

e) 1.8 B



4. Analiza, en equipo, las siguientes figuras homotéticas. No olvides que **C** es el centro de homotecia.



a) ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 2 respecto a la 1? 0.4

b) ¿Y la de la figura 3 respecto a la 2? 0.5

c) ¿Cómo obtendrías la razón de homotecia de la figura 3 respecto a la 1 si ya conoces las razones que hallaste en los incisos a) y b)? $0.4 \times 0.5 = 0.2$

conect@mos

Descarga la actividad de figuras homotéticas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, el método que propusiste para trazar figuras homotéticas.

5. **Traza en tu cuaderno un cuadrado que mida 4 cm de lado. Elige un centro de homotecia exterior al cuadrado y traza cuadrados homotéticos con las siguientes razones.**

resolver

a) Cuadrado 1: razón de homotecia $\frac{1}{2}$

b) Cuadrado 2: razón de homotecia $\frac{3}{4}$

c) Cuadrado 3: razón de homotecia $1\frac{1}{2}$

Ten en cuenta, en cada caso, qué cuadrado se considera en la siguiente tabla como el original y cuál, el homotético. Señala la razón de homotecia correspondiente.

Considerar como cuadrado original al	Considerar como cuadrado homotético al	Razón de homotecia
cuadrado 1	cuadrado 2	$\frac{3}{2}$
cuadrado 1	cuadrado 3	3
cuadrado 2	cuadrado 3	2

Una pista

Considera las medidas del cuadrado original y las razones de homotecia para que te des una idea sobre la medida de los lados de los cuadrados 1, 2 y 3. El análisis de las razones de homotecia también sirve para decidir a qué distancia conviene ubicar el centro de homotecia.

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Después lean la información del siguiente recuadro y respondan en su cuaderno.

a) ¿Cuál es la razón de una composición de homotecias con el mismo centro si la primera razón es $\frac{1}{3}$ y la segunda, 3? Es 1.

b) Comprueben su respuesta trazando…

» un triángulo 1;

» un triángulo 2 homotético al triángulo 1 con $r = \frac{1}{3}$;

» un triángulo 3 homotético al triángulo 2 con $r = 3$ (con el mismo centro de homotecia de los triángulos 1 y 2).

La razón de una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.

BLOQUE 3

Secuencia 5 / lección 54

Curvas en el plano

CONTENIDO Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

¿Sabías que cuando las medidas de los lados de un rectángulo se duplican, el perímetro también se duplica, pero el área se cuadriplica? En esta secuencia estudiarás situaciones cuya representación gráfica no es una línea recta; en particular, interpretarás y construirás gráficas de funciones cuadráticas.

1. Considera que las siguientes relaciones entre las magnitudes que se indican se graficarán en el plano cartesiano. ¿La gráfica resultante será una línea recta?

Relación	¿Se obtendrá una línea recta?
a) Se graficarán todos los puntos cuya abscisa (*x*) sea la medida del lado de un cuadrado y la ordenada (*y*), el perímetro correspondiente.	Sí
b) Se graficarán todos los puntos cuya abscisa (*x*) sea la medida del lado de un cuadrado y la ordenada (*y*), el área correspondiente.	No
c) Se graficarán, sólo en el primer cuadrante, todos los puntos cuyas coordenadas (*x*, *y*), al multiplicarse, den siempre 12.	No

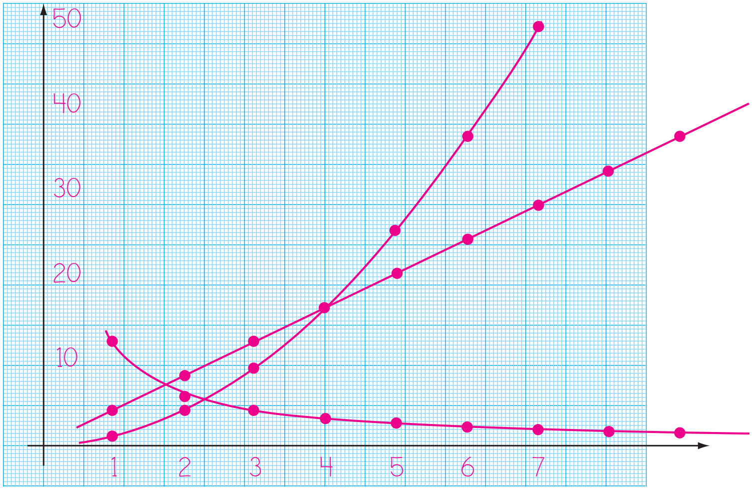
- Comenta, con tus compañeros, cómo obtuviste tus respuestas. Por ahora, no es necesario que lleguen a un acuerdo acerca del procedimiento para resolver la actividad.

2. Trabaja en equipo. Completen las siguientes tablas y grafiquen los puntos en el plano de la siguiente página. Para ello, consideren los valores en conjunto y decidan cuál escala les conviene más para graficar. Cuando hayan trazado las gráficas verifiquen, a partir de éstas, sus respuestas de los incisos a), b) y c) de la actividad anterior.

Lado del cuadrado (*x*)	Perímetro del cuadrado (*y*)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
7	28
8	32
9	36

Lado del cuadrado (*x*)	Área del cuadrado (*y*)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

Dos números positivos cuyo producto es 12	
Valor de *x*	Valor de *y*
1	12
2	6
3	4
4	3
5	$\frac{12}{5}$
6	2
7	$\frac{12}{7}$
8	$\frac{3}{2}$



- Comparen sus resultados con los del resto del grupo. Asignen, para cada relación anterior, una de las siguientes expresiones algebraicas; cuando acuerden cuál corresponde a cada relación, verifiquen su respuesta sustituyendo x por los valores que anotaron en las tablas.

$$y = \frac{12}{x} \qquad y = x^2 \qquad y = 4x$$

3. Completa la siguiente tabla, para la expresión $y = x^2 + 3x + 1$.

Valor de x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
Valor de y	11	5	1	–1	–1	1	5	11

a) Utiliza papel milimétrico para representar los puntos de la tabla anterior. Después elabora la gráfica correspondiente uniendo esos puntos con una línea curva.

b) Explica por qué siempre que se eligen tres puntos de la gráfica de la expresión algebraica anterior, éstos no son colineales. R. T. La gráfica es una curva, por lo que no hay tres puntos colineales.

- Comenta tus resultados con tus compañeros. En particular, expliquen su respuesta del inciso b). Después lean la siguiente información y compárenla con lo que trabajaron en esta lección.

Ya sabemos...

Se dice que tres o más puntos son colineales si están alineados, es decir, si pertenecen a una misma línea recta.

Dependiendo del tipo de relación entre los números (x, y) de una expresión algebraica, la gráfica correspondiente puede ser una línea recta o una curva. Para cerciorarse de que una gráfica no es una línea recta basta demostrar que hay tres puntos de ella que no son colineales.

Secuencia 5 / lección 55

Gráficas cuadráticas

CONTENIDO Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

comunicar

En contexto

En un partido de futbol, cuando el portero toma el balón puede despejarlo, es decir, golpearlo lejos y alto para iniciar un ataque de su equipo.

Ya sabemos...

Dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales si al aumentar una al doble, triple..., la cantidad correspondiente también aumenta el doble, el triple... Lo mismo sucede si una cantidad disminuye a la mitad, a su tercera parte, etcétera.

Una pista

La pelota se detiene cuando llega a su altura máxima.

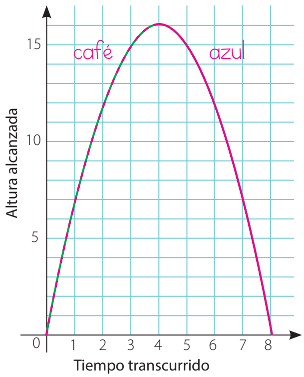
1. Un portero de un equipo de futbol ha despejado el balón. En la siguiente tabla se registran algunas alturas que alcanzó el balón y el tiempo en que lo hizo.

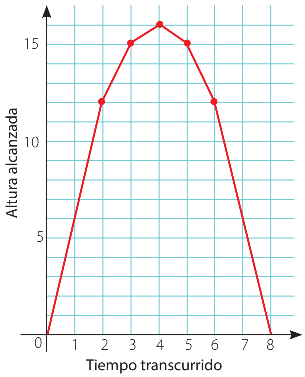
Tiempo (en segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (en metros)	0	7	12	15	16	15	12	7	0

a) ¿Las cantidades de la tabla son directamente proporcionales? No

Explica en tu cuaderno por qué.

b) ¿Qué gráfica corresponde al problema?





Explica por qué la elegiste. R. P.

c) Marca con azul, en la gráfica que escogiste, el tramo donde la pelota vaya aumentando su velocidad, y con color café, aquél donde disminuya.

d) ¿Cuál fue la rapidez promedio durante los primeros dos segundos? 6 m/s

e) ¿Y entre los segundos 2 y 4? 2 m/s

f) Al alcanzar la altura máxima, ¿qué rapidez tenía la pelota? 0 m/s

g) ¿En qué momento fue más rápido la pelota? t = 0 y t = 8

✷ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si para todos fue comprensible por qué la rapidez promedio durante los primeros dos segundos es mayor que la rapidez entre los segundos 2 y 4.

2. Trabaja en equipo. Noten que una de las siguientes expresiones algebraicas está asociada al problema inicial.

a) Subrayen cuál es.

$y = (x - 4)^2 + 16$ $y = 7x$ $y = -(x - 4)^2 + 16$ $y = 6 + x$

b) Expliquen por qué eligieron esa expresión. R. P.

c) Usen la tabla de valores de la página anterior para verificar que la expresión que eligieron sea correcta. Sustituyan x por cualquier valor correspondiente al tiempo y hagan las operaciones indicadas para obtener la altura correspondiente.

comunicar

3. Juan rodeará con una malla una parte de su terreno para formar un corral. Tiene 16 m de malla y quiere hacer el corral de forma rectangular.

a) ¿Qué medidas estimas que debe tener el corral para abarcar la máxima área posible? 4 m por lado

b) Completa la tabla para obtener algunas medidas posibles para el corral.

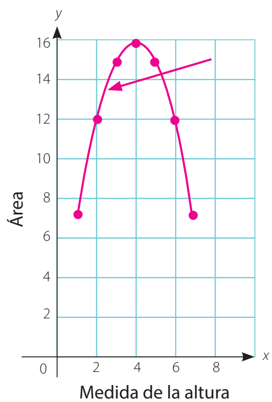
c) Localiza, en el plano cartesiano de abajo, los valores de la tabla y grafícalos.

Altura (cm)	Base (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
1	7	16	7
2	6	16	12
3	5	16	15
4	4	16	16
5	3	16	15
6	2	16	12
7	1	16	7

d) Una posible medida para el corral es 5.5 cm de base y 2.5 cm de altura. Encuentra el punto correspondiente en la gráfica. ¿Cuál sería su área?

13.75 cm

e) Usa la gráfica para hallar las medidas del corral que cubran una mayor área y compara este resultado con tu estimación del inciso a).



- **Compara tus resultados con los del resto del grupo. Discutan a qué punto de la gráfica corresponde el área máxima.**

conect@mos

Practica las gráficas de funciones cuadráticas en

roble.pntic.mec.es/jarran2/geogebra/web/funcioncuadratica1.htm

Lee la información que se presenta y contesta las preguntas. Al finalizar, explica en tu cuaderno cómo cambia la gráfica de una parábola al variar los parámetros de su ecuación.

BLOQUE 3

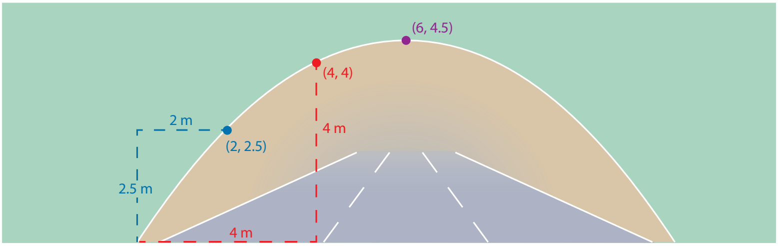
Secuencia 5 / lección 56

En movimiento

CONTENIDO Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

resolver

1. Para conectar dos ciudades por carretera, se construyó un túnel con la forma que se muestra abajo. Este tipo de curvas se llaman *parábolas*.



La altura del túnel sobre la carretera y la distancia horizontal a cualquiera de los extremos son cantidades que dependen una de otra: al variar la distancia al extremo izquierdo, la altura del túnel también cambia. Por ejemplo, el punto azul está a 2 m del extremo y a 2.5 m de altura, mientras que el punto rojo se encuentra a 4 m del extremo y a 4 m de altura.

a) De las siguientes expresiones, una relaciona la altura sobre la carretera (y) con la distancia al extremo del túnel (x). Subráyala.

» $y = \frac{-(x-6)^2}{8} + 4.5$ (subrayada)

» $y = \frac{-(x+6)^2}{8} + 4.5$

» $y = \frac{(x-6)^2}{8} - 4.5$

» $y = \frac{(x+6)^2}{8} - 4.5$

b) Elabora, en tu cuaderno y para la expresión que hayas elegido, una tabla de valores en la que indiques la altura del túnel a 1 m, 3 m, 5 m, 6 m, 7 m, 9 m, 11 m y 12 m de distancia del extremo izquierdo. Después ubica los puntos en un plano cartesiano y únelos para trazar la gráfica del túnel.

» ¿Qué altura tiene el túnel a 5 m del extremo? 4.375 m

» ¿A qué distancias del extremo izquierdo el túnel tiene una altura de 1.375 m?

1 m y 11 m

» En ese caso, ¿cuánto mide el túnel de ancho? 12 m

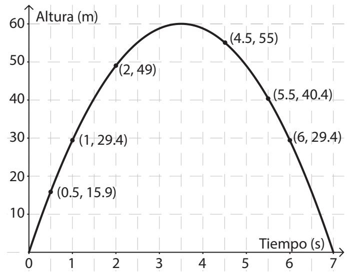
» Si la caja de un tráiler mide 2 m de ancho y 4.25 m de altura, ¿ dicho vehículo puede circular por el carril central? Sí

» Explica tu respuesta. R. T. Porque los puntos (5, 4.25) y (7, 4.25) están abajo de la parábola.

Una pista

Observa la gráfica e imagina cómo se vería un tráiler con las dimensiones indicadas pasando por el túnel.

2. Los alumnos de tercero de secundaria construyeron un cohete en su clase de ciencias; lo lanzaron en el patio de la escuela y tomaron algunos datos para elaborar la gráfica de la derecha.



a) Trabaja en equipo. Completen la tabla, donde se relacionan la altura que alcanzó el cohete y el tiempo transcurrido desde su lanzamiento.

Tiempo (s)	1.5	2.5	5	6.5	7
Altura (m)	40	55	50	15	0

b) Subrayen la expresión algebraica que relaciona la altura (h) con el tiempo (t). Usen la gráfica o la tabla de valores para verificar si la expresión que subrayaron es correcta.

» $h = 4.9(t + 3.5)^2 - 60$ $h = 4.9(t + 3.5)^2 + 60$

» $h = -4.9(t - 3.5)^2 - 60$ $\underline{h = -4.9(t - 3.5)^2 + 60}$

c) ¿Cuánto tardó el cohete en alcanzar su altura máxima? 3.5 s

d) ¿Qué velocidad (vertical) tenía en ese momento? 0 m/s

e) ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que despegó hasta que cayó al suelo? 7 s

f) ¿En qué segundos el cohete tenía mayor rapidez? t = 0 y t = 7

conect@mos

Descarga la actividad de funciones cuadráticas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

✷ Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de las actividades 1 y 2.

3. Trabaja en equipo. Consideren las siguientes ecuaciones.

$y = x^2$ $y = -2x^2$ $y = 0.5x^2$ $y = x^2 + 2$ $y = 3x^2 + 1$ $y = -0.1x^2$

a) Encuentren los valores de y cuando x vale −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3, y elaboren en su cuaderno la tabla que corresponda a cada expresión.

b) Tracen las gráficas correspondientes en sus cuadernos.

c) Adviertan que las expresiones tienen la forma $y = ax^2 + c$. Anoten en la tabla el valor de a y c para cada ecuación.

	$y = x^2$	$y = -2x^2$	$y = 0.5x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = 3x^2 + 1$	$y = -0.1x^2$
a	1	-2	0.5	1	3	-0.1
c	0	0	0	2	1	0

✷ Comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Comenten la siguiente información.

Las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - b)^2 + c$ son parábolas.

Secuencia 6 / lección 57

Llenado de botellas

CONTENIDO

Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Se vierte líquido en un recipiente irregular. ¿Cómo es la gráfica que relaciona la cantidad de líquido con la altura que alcanza dentro del recipiente? Un automóvil avanza durante un tiempo, se detiene y vuelve a avanzar a distinta velocidad. ¿Cómo es la gráfica que relaciona el tiempo con la distancia recorrida?

1. Resuelve la actividad en equipo. Necesitarán el siguiente material.



» Un recipiente transparente en el que se pueda verter agua (procuren que los recipientes de cada equipo sean distintos, por ejemplo, una botella de refresco, un bote de jabón, etcétera)
» Un embudo para introducir agua al recipiente
» Un recipiente pequeño, como un bote de yogur, una taza o algo similar, y una cubeta para almacenar el agua que se necesite
» Una regla graduada
» Una tarjeta o una hoja de papel para anotar las mediciones

a) Viertan varias veces el líquido del recipiente pequeño (bien lleno) en el recipiente grande, hasta casi llenarlo.

b) Cada vez que viertan el líquido del recipiente pequeño, registren la altura que alcanza el agua en el grande.

c) Hagan en su cuaderno la gráfica que relacione el número de recipientes pequeños vertidos (eje de las abscisas) con la altura, en centímetros, que alcance el líquido en el recipiente grande (eje de las ordenadas).

Reflexionamos

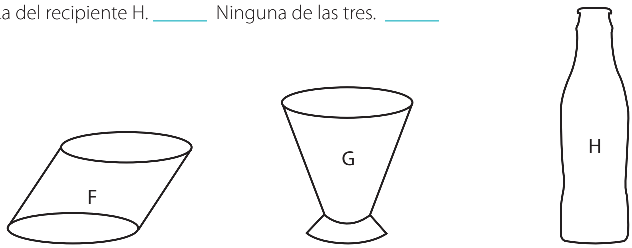
Para medir la altura se pone la regla como se muestra en la fotografía. ¿Por qué no se coloca pegada a la orilla del recipiente?

✱ Comparen, con ayuda del profesor, sus gráficas con las de sus compañeros. Analicen la relación entre la forma de cada gráfica y la del recipiente grande.

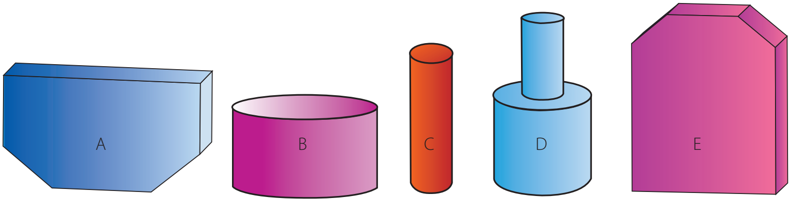
2. Si se graficara la relación "número de tazas vertidas-altura del agua" para los siguientes recipientes, ¿cuál sería una recta?

La del recipiente F. ✔ La del recipiente G. ______

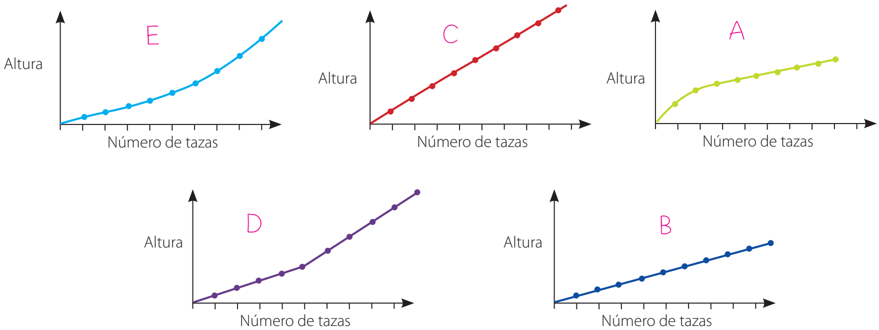
La del recipiente H. ______ Ninguna de las tres. ______



3. Trabaja en equipo. Cada recipiente se llenó vertiendo agua con una taza pequeña.



Para cada caso, se graficó la cantidad de tazas vertidas y la altura que alcanzó el líquido dentro del recipiente. Averigüen qué gráfica corresponde a cada recipiente.



- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Expliquen cómo dedujeron a qué recipientes corresponden las gráficas con secciones curvas, y por qué deben ser curvas y no rectas.

4. Las siguientes tablas corresponden a dos recipientes en los que se vertió cierta cantidad de tazas de agua, y en los cuales se midió después la altura que alcanzó el líquido.

Recipiente 1	
Líquido (tazas)	**Altura (cm)**
1	4
2	8
3	12
4	15
5	17

Recipiente 2	
Líquido (tazas)	**Altura (cm)**
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Reúnete en equipo. Hagan en su cuaderno lo que se pide a continuación.

a) Grafiquen los datos de cada tabla.
b) Dibujen la forma que podría tener cada recipiente.

- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si dibujaron más de una forma de recipiente correcta, expliquen por qué ocurrió esto.

En contexto

Descubre cómo aparecen las matemáticas en muchos aspectos de lo cotidiano en *El secreto de los números*, de la Biblioteca de Aula.
Jouette, André, *El secreto de los números*, México, SEP-Ediciones Robinbook, serie Espejo de Urania, 2004.

BLOQUE 3

Secuencia 6 / lección 58

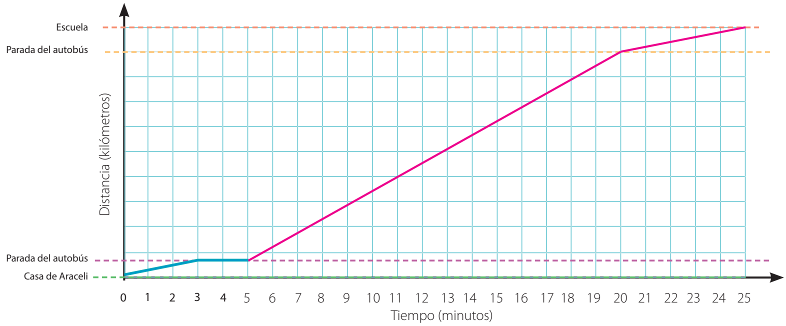
El movimiento en gráficas

CONTENIDO

Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

1. Para ir a su escuela, a 5 km de su casa, Araceli caminó hasta la parada del autobús y esperó a que éste llegara. El trayecto en autobús duró 15 min y, al bajar, ella caminó otros 5 min hasta la escuela.

La gráfica muestra la primera parte del recorrido de Araceli, desde que salió de su casa hasta que se subió al autobús.



a) ¿Cuánto tiempo tardó Araceli en caminar de su casa a la parada del autobús? 3 min

b) ¿Cuánto tiempo esperó el autobús? 2 min

c) Completa la gráfica del trayecto de Araceli.

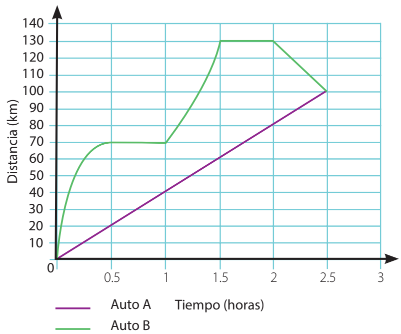
d) ¿A qué distancia de la casa de Araceli está la parada del autobús? 400 m

e) ¿Qué distancia recorrió en autobús? 4100 m

f) Si Araceli salió de su casa a las 6:55 de la mañana, ¿a qué hora llegó a la escuela?

7:20 de la mañana

2. Dos automóviles, A y B, parten juntos hacia la misma dirección. Las gráficas relacionan, para cada caso, el tiempo de recorrido con la distancia desde el punto de salida.



conect@mos

Observa más ejemplos de gráficas con secciones rectas y curvas en

www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/funciones/pinterpretcionfunciones/interpretaciondegraficas.htm

Trabaja en equipo. Resuelvan algunas de las actividades propuestas y presenten su solución al resto del grupo.

a) ¿En algún momento el auto A aumentó su velocidad? No

Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál fue ese momento. ______

b) ¿Qué auto se detuvo en dos ocasiones? B ¿Cuánto tiempo estuvo detenido en total? 1 h ¿A qué distancia del origen se detuvo la primera vez? a 70 km ¿Y la segunda? a 130 km

c) ¿Se encontraron los autos en algún punto? Sí ¿Cómo lo sabes? R. T. Las gráficas se cruzan.

d) ¿Qué auto se alejó más del punto de salida? B ¿A qué distancia llegó? 130 km

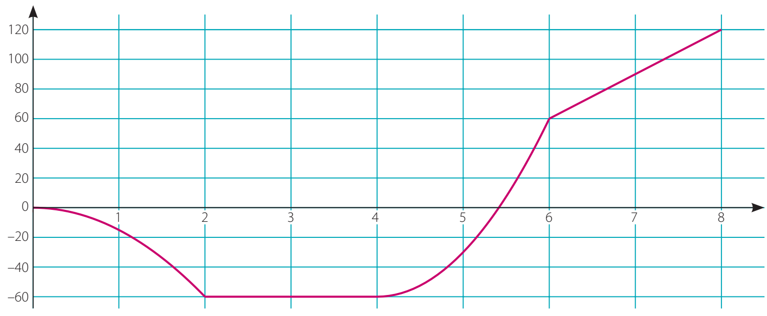
e) Uno de los autos mantuvo una velocidad constante. ¿Cuál fue esa velocidad? 40 km/h

f) ¿En qué tiempo aproximado el auto B estaba a 100 km del punto de partida? 1.25 h

g) ¿Cuál era la velocidad del auto B entre las horas 2 y 2.5 del recorrido? 60 km/h

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, comenten por qué, en la gráfica del automóvil B, la distancia disminuye en el último tramo.**

3. Inventa, con un compañero, una historia que corresponda a la siguiente gráfica.



R. P.

4. Inventen en su cuaderno otra historia y una gráfica que se relacionen entre ellas.

- **Comparen sus historias y sus gráficas con las de sus compañeros. Comprueben que cada historia realmente corresponda a su gráfica.**

conect@mos

Descarga la actividad de lectura y construcción de gráficas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen y comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

Convivimos

Como has notado en esta secuencia, un problema se puede resolver por medio de una tabla, una gráfica o un diagrama. En equipo, identifiquen qué forma se les facilita más y cuál se les dificulta. Comenten cómo pueden superar sus dificultades.

Secuencia 7 / lección 59

Dados y pelotas

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

¿Cuál es la probabilidad de que un dado caiga en número par dos veces seguidas?, ¿y en número par y luego impar? ¿Cuál es la probabilidad de equivocarse en dos problemas que se resuelven al azar? En esta secuencia aprenderás a calcular la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes.

resolver

1. Responde en tu cuaderno y explica el procedimiento que usarías para resolver lo siguiente.
   a) Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila-águila? $\frac{1}{4}$
   b) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6-3? $\frac{1}{36}$
   c) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener número par en ambos? $\frac{1}{4}$

- Comenta tus respuestas con tus compañeros. En particular, expliquen cómo calcularon la probabilidad del inciso c).

técnicas

2. Lee los problemas y responde en tu cuaderno.
   a) En una caja hay 16 bolas: 8 rojas, 4 negras, 2 azules y 2 blancas. Se harán dos extracciones con remplazo, es decir, se sacará una bola, se regresará a la caja y se sacará otra.
      » ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas? $\frac{1}{4}$
      » ¿Y la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda, negra? $\frac{1}{8}$
   b) En otra caja hay 30 bolas: 15 amarillas, 10 azules y 5 moradas. Se harán dos extracciones sin remplazo, es decir, para la segunda extracción habrá una bola menos en la urna.
      » ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pelota sea amarilla y la segunda, azul? $\frac{5}{29}$
      » ¿Y la probabilidad de que ambas sean moradas? $\frac{2}{87}$

- Expliquen por qué no es útil anotar y contar uno por uno los casos favorables y los casos totales para resolver el problema 2. Comenten qué otros procedimientos encontraron.

Ya sabemos...

Para encontrar el resultado de una "fracción de fracción" basta multiplicar entre sí los numeradores y los denominadores. Por ejemplo:

$\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$

3. En una caja hay pelotas azules, verdes y blancas. No se sabe cuántas hay de cada tipo, pero sí que la tercera parte del total de pelotas son azules y la mitad son verdes.
   a) Si se hacen dos extracciones con remplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelota azul en ambos casos? $\frac{1}{9}$
   b) ¿Y de que la primera sea azul y la segunda, verde? $\frac{1}{6}$
   c) Si en la caja hubiera seis pelotas en total, ¿las probabilidades que anotaste en los incisos a) y b) cambiarían? No
   d) Y si hubiera 24 pelotas, ¿seguirían siendo las mismas probabilidades? Sí

* Responde con tus compañeros las siguientes preguntas relacionadas con el problema 1c).

a) Del total de casos favorables, ¿en qué parte el primer dado cae en número par?

En la mitad

b) De los casos en los que el primer dado cae en número par, ¿qué parte cumple que el segundo dado es par?

La mitad

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Una pista

La probabilidad no es $\frac{1}{3}$.

c) Entonces, si en la mitad de la mitad de los resultados posibles los dos dados caen en número par, la probabilidad es $\frac{1}{4}$.

d) Comparen este procedimiento con los que utilizaron en los problemas anteriores. ¿Cuál les parece más fácil? ¿Con cuál se resuelve más rápido? R. P.

4. Resuelve en equipo. En un examen de opción múltiple hay cuatro opciones de respuesta para cada pregunta, de las cuales sólo una es correcta. Completen la tabla.

Preguntas contestadas al azar	1	2	3	4
Probabilidad de acertar todas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$
Probabilidad de fallar al menos una	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{255}{256}$

a) ¿Cómo calcularon las probabilidades de la fila verde? R. P.

b) ¿Y las de la azul? R. P.

* Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten cómo se relacionan las probabilidades de las filas verde y azul, y expliquen la razón. Al finalizar, lean la siguiente información y úsenla para verificar sus respuestas de esta lección.

En los problemas anteriores, la probabilidad de que los dos eventos sucedan se puede obtener al multiplicar las probabilidades de ambos. Por ejemplo, en la actividad 3, la probabilidad de que ambas pelotas sean azules es $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

BLOQUE 3

Secuencia 7 / lección 60

Que sea pulsera, y que sea azul

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

resolver

1. En una caja hay 20 pulseras y 40 relojes. De los 60 accesorios, 30 son azules; 15, rojos; y 15, verdes. Una persona saca un accesorio al azar. Responde lo siguiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el accesorio sea una pulsera? ¿Y de que sea un accesorio azul? ¿Y de que sea una pulsera azul? $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; no puede saberse

b) Arturo calculó la probabilidad de que el accesorio obtenido sea una pulsera azul de la siguiente manera: la tercera parte de los accesorios son pulseras, y de éstas, la mitad son azules. Entonces, la probabilidad es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, es decir $\frac{1}{6}$.

Arturo cometió un error. Explica cuál es. R. T. La mitad de los accesorios son azules, pero no necesariamente la mitad de las pulseras son azules.

c) Si hubiera ocho pulseras azules, ¿sería verdad que la probabilidad de sacar una pulsera azul es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$? No

d) ¿Y si hubiera 10? Sí

e) ¿Cuántos relojes rojos es indipensable que haya en la caja para que la probabilidad de obtener un reloj rojo coincida con la probabilidad de que el accesorio sea reloj multiplicada por la probabilidad de que el accesorio sea rojo? 10

2. En una caja hay dos bolas negras y cuatro blancas. Se harán dos extracciones. Responde lo siguiente.

a) Calcula la probabilidad de que en la primera extracción la pelota sea blanca y en la segunda, negra. Ten en cuenta que las extracciones son con remplazo. $\frac{2}{9}$

b) Calcula la probabilidad de que en la primera extracción la pelota sea blanca y en la segunda, negra. Ten en cuenta que las extracciones son sin remplazo. $\frac{4}{15}$

c) En el segundo caso, la probabilidad no es el producto de la probabilidad de que sea blanca por la probabilidad de que sea negra. ¿Por qué ocurre esto? R. T. Porque cuando se saca la segunda bola, hay cinco y no seis, como al principio

Ya sabemos...

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

conect@mos

Resuelve más problemas de probabilidad en

arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/index.html

Trabaja en equipo. Lean la información que se presenta y resuelvan las actividades propuestas. Al finalizar, comenten con el resto del grupo qué dificultades encontraron.

* Comenta, con el grupo, las respuestas de los dos problemas anteriores. Después lean y comenten la siguiente información.

En el primer problema, para que la probabilidad de sacar una pulsera azul coincida con la probabilidad de que sea una pulsera por la probabilidad de que sea azul, es necesario que la mitad de las pulseras sean azules, puesto que la mitad de los accesorios son azules, es decir, que los eventos "pulsera" y "azul" sean independientes.
Sólo cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que sucedan ambos puede calcularse multiplicando las probabilidades de que suceda cada uno por separado.

3. En una caja hay pelotas moradas y verdes. En las siguientes tablas se registra la posibilidad de obtener siempre moradas cuando se hacen varias extracciones. Una tabla corresponde a extracciones con remplazo y la otra, a extracciones sin remplazo. Identifica qué tabla corresponde a cada tipo de extracción. Puedes usar calculadora.

Tabla 1

Número de extracciones	Probabilidad de que todas las pelotas sean moradas
1	0.2
2	0.037
3	0.0061
4	0.0009

Tabla 2

Número de extracciones	Probabilidad de que todas las pelotas sean moradas
1	0.2
2	0.04
3	0.008
4	0.0016

Una pista

En una de las tablas, al dividir la probabilidad de cada fila entre la de la fila anterior, se obtiene siempre el mismo resultado. En la otra tabla los cocientes varían. ¿Por qué ocurre esto?

4. Hay dos eventos independientes, A y B. La probabilidad de que suceda A es $\frac{1}{3}$, y la probabilidad de que sucedan ambos, A y B, es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda B? $\frac{1}{2}$

5. Se tienen dos eventos independientes, C y D. Para el evento C hay seis resultados favorables de 30 posibles, y la probabilidad de obtener resultados favorables en ambos eventos es $\frac{1}{15}$. ¿Cuántos resultados favorables hay para D? 10

6. Supongamos que, en un hospital, la probabilidad de que nazca una niña es 60%, y la de que nazca un niño, 40%. Si nacen tres bebés, ¿cuál es la probabilidad de que sean sólo niñas? $\frac{27}{125}$

Reflexionamos

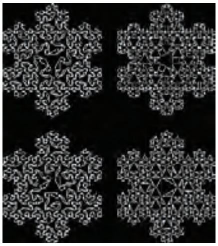
Se tienen dos urnas, 1 y 2. La tercera parte de las bolas de la urna 1 y la cuarta parte de las de la 3 son verdes. Si se elige una urna al azar, y de ella se toma una bola, también al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

* Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten cómo determinaron a qué tipo de extracción corresponde cada tabla de la actividad 3.

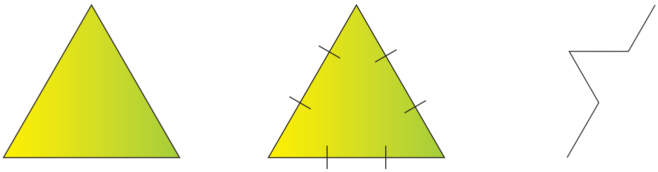
El infinito

¿Te gustaría dibujar copos de nieve como éstos?





A continuación dibujarás uno. Sigue las instrucciones.



1. Primero traza en una hoja de papel un triángulo equilátero bastante grande (18 cm de lado es un buen tamaño).

2. Después divide en tres partes iguales cada uno de los lados.

3. En cada lado, sustituye el segmento central por dos segmentos con las mismas medidas que él, tal como se muestra.

¿Cuál es el perímetro del triángulo inicial?

54 cm

¿Cuál es el perímetro de la figura resultante? Puedes usar fracciones o decimales para expresar el resultado.

72 cm

Esto es sólo el inicio. Ahora repetirás los pasos 1 y 2 con cada uno de los 12 segmentos de la figura que resultó.

- Divide cada segmento en tres partes iguales.
- Sustituye el segmento central por un triángulo equilátero incompleto: 
- Después de terminar con cada uno de los segmentos, repite nuevamente los pasos anteriores las veces que puedas.

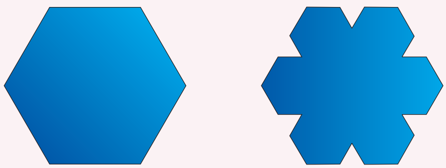
A la figura anterior se le llama *copo de nieve de Koch*, en honor a su inventor, Niels Fabian Helge von Koch, un matemático sueco que la dio a conocer en 1904. Cuando el proceso de dividir los lados continúa, el área de la figura aumenta pero nunca rebasa cierta cantidad, pues ésta ocupa una región limitada del plano. En cambio, su perímetro crece y rebasa cualquier límite, es decir, tiende al infinito. Este tipo de figuras se llaman *fractales*.

¿Quieres seguir dibujando fractales?

a) Traza en una hoja de cuaderno tamaño profesional un hexágono regular lo más grande posible.

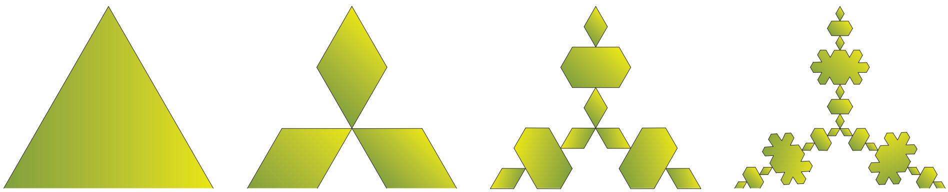
b) Divide en tres partes iguales cada segmento.

c) Sustituye el segmento central por dos segmentos del mismo tamaño, como se muestra en la figura inferior derecha. Repite este procedimiento tantas veces como sea posible.



Como posiblemente ya notaste, se trata de un procedimiento similar al de la actividad anterior, pero ahora el trazo central se hace hacia adentro de la figura. ¿Qué sucede ahora con el área de la figura? ¿Y con el perímetro?

Si efectúas los mismos trazos, pero ahora en un triángulo equilátero, obtendrás un fractal llamado *antiisla de Koch*.



Ahora crea un fractal propio. Puedes partir de la figura que tú quieras.

Para saber más acerca de fractales entra en
www.cienciateca.com/fractales.html
www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm

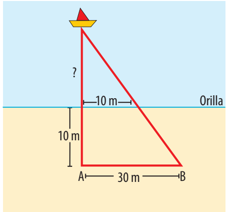
Selecciona la opción correcta.

1. ¿Qué ecuación tiene sólo una solución?

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $x^2 - x + 2 = 0$ d) $x^2 + x - 2 = 0$

2. Para medir la distancia que hay entre un barco y la orilla del mar, se observó el primero desde los puntos A y B, y se tomaron las medidas indicadas en la figura. ¿A qué distancia está el barco de la orilla?



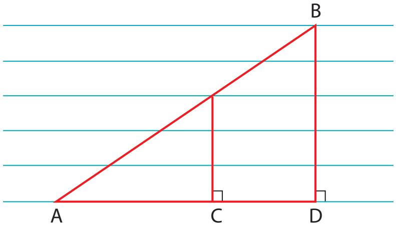
a) 5 m

b) 10 m

c) 15 m

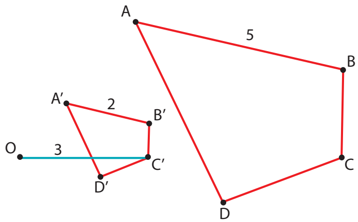
d) 20 m

3. En la siguiente figura, las rectas horizontales son paralelas y equidistantes. ¿Qué afirmación es verdadera?



a) $2\overline{AC} = \overline{CD}$ b) $\overline{AC} = 2\overline{CD}$ c) $2\overline{AC} = 3\overline{CD}$ d) $3\overline{AC} = 2\overline{CD}$

4. El cuadrilátero ABCD es homotético al cuadrilátero A′B′C′D′, con centro de homotecia O. Si $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{A'B'} = 2$ cm y $\overline{OC'} = 3$ cm, ¿cuánto mide $\overline{OC}$?



a) 7.3 cm

b) 7.4 cm

c) 7.5 cm

d) 7.6 cm

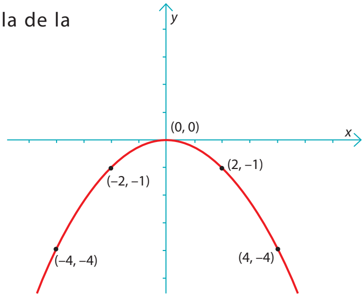
5. ¿Qué ecuación corresponde a la parábola de la derecha?

a) $y = 4x^2$

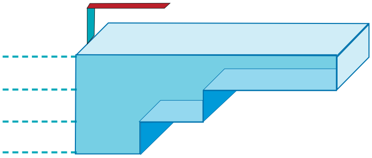
b) $y = \frac{1}{4}x^2$

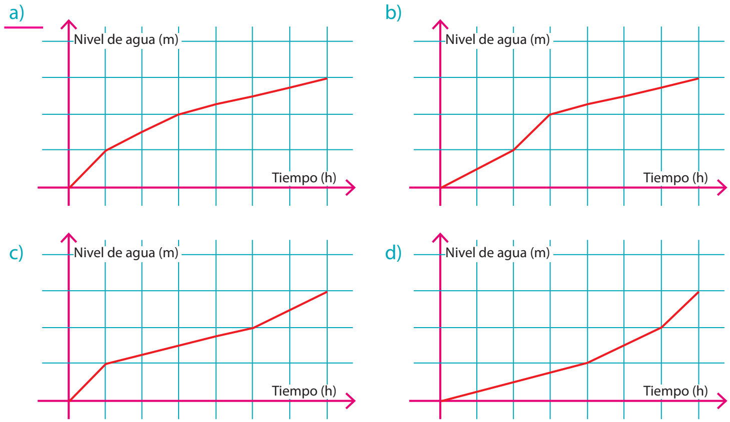
c) $y = -4x^2$

d) $y = -\frac{1}{4}x^2$



6. Para llenar una alberca de tres niveles, como la de la figura, se utilizó un flujo de agua constante. ¿Qué gráfica muestra la relación entre el nivel del agua y el tiempo transcurrido al llenarla?

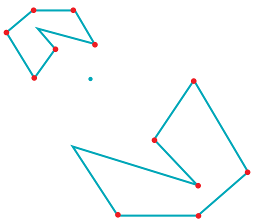




7. Para ganarle a Juan en Backgammon, Malaquías necesita que su último tiro sea doble seis, es decir, tirar dos dados y que ambos caigan en 6. ¿Qué probabilidad tiene de lograrlo?

a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{36}$

8. ¿Qué puede afirmarse de la razón de homotecia de las figuras de la derecha?



a) Que es positiva.

b) Que es negativa.

c) Que es mayor que 0 y menor que 1.

d) Que es mayor que 1.

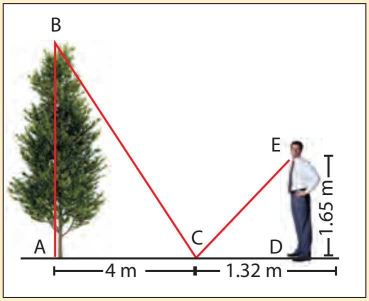
sm

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Esteban y su árbol

Hace unos años, Esteban plantó un árbol en su jardín. Desde entonces, cada año registra su crecimiento. Para medirlo utiliza un método ingenioso: pone un espejo en el suelo, a 4 m del pie del árbol, y se aleja en línea recta hasta ver la punta del árbol reflejada. Luego mide la distancia que hay entre su posición y el espejo y, mediante semejanza, deduce la altura del árbol.



Pregunta 1. ¿Cómo son los ángulos de incidencia y de reflexión que se forman a partir del espejo?

Iguales

Pregunta 2. ¿Por qué los triángulos **ABC** y **DEC** de la figura son semejantes?

R. T. Porque sus tres ángulos miden lo mismo

Pregunta 3. Si los ojos de Esteban están a 1.65 m del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?

5 m

Pregunta 4. Explica si el método de Esteban funciona o no con un árbol chueco.

R. T. No, en ese caso los triangulos no serían semejantes

Pregunta 5. Escoge un objeto de altura inaccesible de tu entorno (un árbol, un edificio, un poste de luz...) y mídelo utilizando el método de Esteban.

R. P.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Comunicar información matemática
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Palabras que cambian

La glotocronología es una disciplina que estudia la relación entre las lenguas a lo largo del tiempo. Fue desarrollada por el lingüista Morris Swadesh, quien partió de dos principios.

- Existe un vocabulario básico en cada lengua, y es relativamente estable.
- Las palabras básicas desaparecen de forma constante a una tasa de 14% cada milenio.

Pregunta 1. Dos lenguas emparentadas comparten hoy 86% de sus palabras básicas. De acuerdo con la teoría de Swadesh, ¿hace cuánto tiempo fueron la misma lengua?

Hace mil años

Pregunta 2. La lengua indoeuropea, de la que proviene el español, tuvo su origen aproximadamente hace 4 000 años. Según la teoría de Swadesh, ¿qué porcentaje de palabras básicas del indoeuropeo ha sobrevivido en el español?

$(0.86)(0.86)(0.86)(0.86) = 54\%$

Pregunta 3. Imagina que inventas hoy una lengua con 50 palabras básicas. De acuerdo con la glotocronología, ¿cuántas sobrevivirán en 1 000 años?

43 palabras

Pregunta 4. ¿Cuál es la probabilidad de que una palabra básica sobreviva a un periodo de 1 000 años?

a) $\frac{7}{50}$ b) $\frac{14}{50}$ c) $\frac{36}{50}$ d) $\frac{43}{50}$

Pregunta 5. ¿La probabilidad de que una palabra básica sobreviva a un periodo de 4 000 años es mayor a 50%?

Sí, pues 54% es mayor que 50%

Autovaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general.				
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver problemas.				
Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales.				
Aplico la semejanza para trazar figuras homotéticas.				
Interpreto y elaboro gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.				
Interpreto y elaboro gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Y para terminar...

Pasar el río

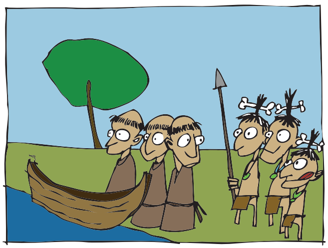
Tres acertijos para pasar el río



1. Un señor se encuentra en la orilla de un río con un perro, una gallina y una bolsa de maíz. El señor desea cruzar el río con sus tres pertenencias; para lograrlo, dispone de una balsa en la que necesariamente debe ir él y sólo una de las tres cosas que desea llevar consigo. El problema consiste en pasar al perro, a la gallina y la bolsa de maíz del otro lado, pero cuidando que nunca se quede sola la gallina con el maíz, porque la gallina se lo comería, ni el perro con la gallina, ya que el perro se la comería. Escribe un instructivo detallado mediante el cual el señor pueda llevar en su balsa a la gallina, al perro y el maíz sin sufrir pérdida alguna.



2. Ocho excursionistas quieren cruzar un río, pero no hay puentes; sólo dos niños que juegan en un bote tan pequeño que únicamente podría transportar a un adulto o, máximo, a los dos niños juntos. Un niño y un adulto lo harían hundirse. ¿Cómo hacer para que crucen todos los excursionistas? Describe tu solución.



3. Tres misioneros y tres caníbales se encuentran en la orilla de un río que quieren cruzar. El problema consiste en que el río está repleto de pirañas y sólo disponen de una canoa de remos en la que caben dos pasajeros. Los tres misioneros son capaces de remar y los caníbales también. Sin embargo, se debe tener mucho cuidado al cruzar el río, pues si en algún momento, en alguna de las orillas, hay más caníbales que misioneros, los caníbales se comerían a los misioneros. ¿Existe algún procedimiento mediante el cual puedan cruzar los seis sin que algún misionero sea devorado? De ser así, escribe un instructivo que permita resolver la situación.

Respuestas (en cada caso se indica una respuesta posible).

Acertijo 1

- Pasa el señor con la gallina.
- Se regresa el señor.
- Pasa el señor con el perro.
- Se regresa el señor con la gallina.
- Pasa el señor con el maíz.
- Se regresa el señor.
- Pasa el señor con la gallina.

Acertijo 2

- Pasan los dos niños.
- Se regresa un niño.
- Pasa un adulto
- Se regresa el otro niño.

Se repiten estos pasos siete veces más.

Acertijo 3

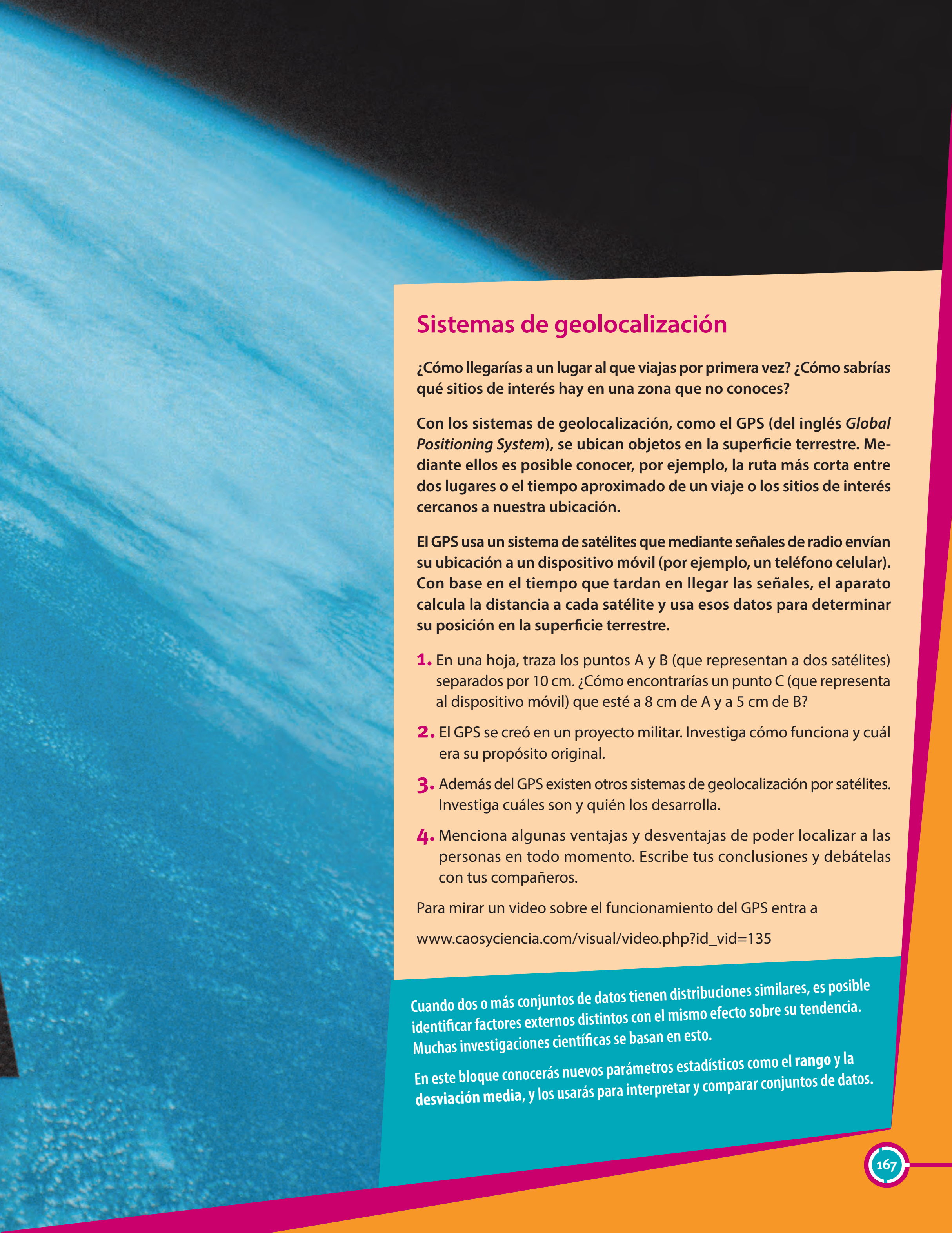
- Pasa un misionero con un caníbal.
- Se regresa el misionero.
- Pasan dos caníbales.
- Se regresa un caníbal.
- Pasan dos misioneros.
- Se regresa un misionero y un caníbal.
- Pasan dos misioneros.
- Se regresa un caníbal.
- Pasan dos caníbales.
- Se regresa un caníbal.
- Pasan dos caníbales.



BLOQUE 4

Aprendizajes esperados

- ✓ Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- ✓ Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- ✓ Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.



Sistemas de geolocalización

¿Cómo llegarías a un lugar al que viajas por primera vez? ¿Cómo sabrías qué sitios de interés hay en una zona que no conoces?

Con los sistemas de geolocalización, como el GPS (del inglés *Global Positioning System*), se ubican objetos en la superficie terrestre. Mediante ellos es posible conocer, por ejemplo, la ruta más corta entre dos lugares o el tiempo aproximado de un viaje o los sitios de interés cercanos a nuestra ubicación.

El GPS usa un sistema de satélites que mediante señales de radio envían su ubicación a un dispositivo móvil (por ejemplo, un teléfono celular). Con base en el tiempo que tardan en llegar las señales, el aparato calcula la distancia a cada satélite y usa esos datos para determinar su posición en la superficie terrestre.

1. En una hoja, traza los puntos A y B (que representan a dos satélites) separados por 10 cm. ¿Cómo encontrarías un punto C (que representa al dispositivo móvil) que esté a 8 cm de A y a 5 cm de B?
2. El GPS se creó en un proyecto militar. Investiga cómo funciona y cuál era su propósito original.
3. Además del GPS existen otros sistemas de geolocalización por satélites. Investiga cuáles son y quién los desarrolla.
4. Menciona algunas ventajas y desventajas de poder localizar a las personas en todo momento. Escribe tus conclusiones y debátelas con tus compañeros.

Para mirar un video sobre el funcionamiento del GPS entra a

www.caosyciencia.com/visual/video.php?id_vid=135

Cuando dos o más conjuntos de datos tienen distribuciones similares, es posible identificar factores externos distintos con el mismo efecto sobre su tendencia. Muchas investigaciones científicas se basan en esto.

En este bloque conocerás nuevos parámetros estadísticos como el rango y la desviación media, y los usarás para interpretar y comparar conjuntos de datos.

BLOQUE 4

Secuencia 1 / lección 61

Figuras con palillos

CONTENIDO Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Has estudiado sucesiones a las que les corresponden expresiones de primer grado, por ejemplo, $n + 4$ o $7n$. En esta secuencia trabajarás con sucesiones cuyas expresiones son de segundo grado. ¿Cómo se identifican? ¿Cómo se encuentra la expresión general que permite calcular el enésimo término?

comunicar

En contexto

Conoce más sobre el uso de las variables y las incógnitas en el álgebra en *Una ventana a las incógnitas*, de la Biblioteca Escolar.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las incógnitas*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

1. Trabaja con un compañero. Completen la tabla de cada sucesión. Pueden hacer las figuras con palillos. En la última columna de cada tabla encontrarán la expresión general del enésimo término.

a)

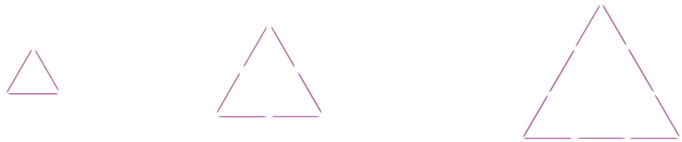


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	3	6	9	12	15	300	600	$3n$

b)



Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	4	6	8	10	12	202	402	$2n + 2$

c)

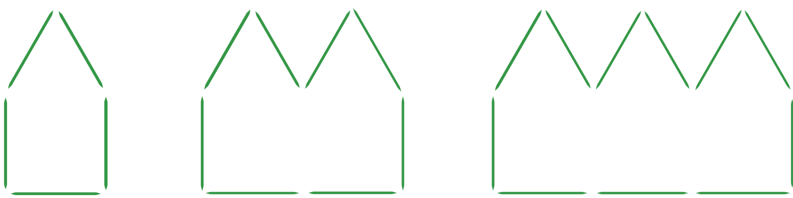


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	5	8	11	14	17	302	602	$3n + 2$

d)

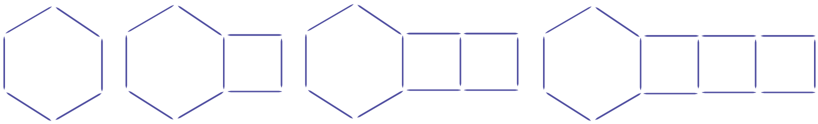


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	6	9	12	15	18	303	603	$3n + 3$

e)

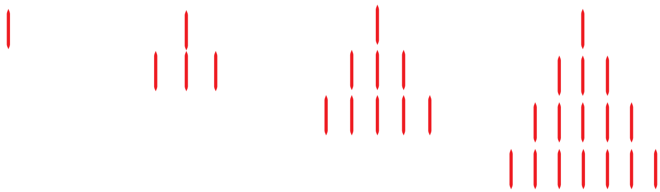


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	1	4	9	16	25	10 000	40 000	n^2

f)



Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	4	5	10	17	26	10 001	40 001	$n^2 + 1$

- Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros, así como las expresiones generales para calcular el enésimo término. Si éstas no están escritas de la misma manera, analicen si son equivalentes. En particular comenten las sucesiones de los incisos e) y f). Estudiarán sucesiones semejantes a éstas en las próximas lecciones.

BLOQUE 4

Secuencia 1 / lección 62

Sucesiones con figuras

CONTENIDO: Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

1. Trabaja con un compañero. Completen la tabla de cada sucesión. Fíjense en que los primeros dos renglones corresponden al número de elementos de cada tipo, mientras que el último renglón corresponde a la cantidad total de elementos. En la última columna de cada tabla encontrarán la expresión general del enésimo término.

a) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

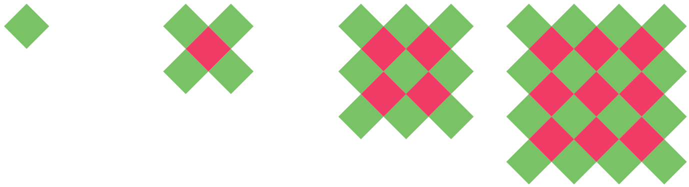


Figura	1	2	3	4	5	100	n
Número de cuadrados verdes	1	4	9	16	25	10000	n^2
Número de cuadrados rojos	0	1	4	9	16	9801	$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$
Número total de cuadrados	1	5	13	25	41	19801	$n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1$

b) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

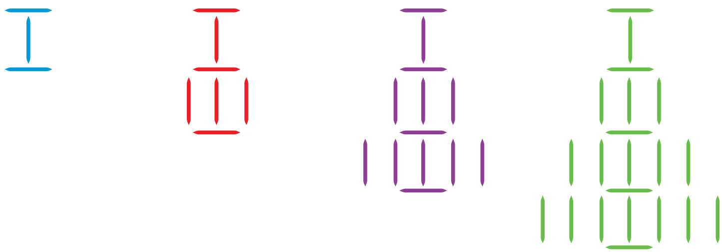


Figura	1	2	3	4	5	100	n
Número de segmentos horizontales	2	3	4	5	6	101	$n + 1$
Número de segmentos verticales	1	4	9	16	25	10000	n^2
Número total de segmentos	3	7	13	21	31	10 101	$n^2 + n + 1$

c) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

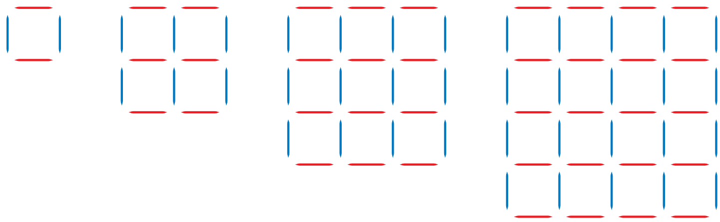


Figura	1	2	3	4	5	100	n
Número de segmentos rojos	2	6	12	20	30	10100	$n(n + 1) = n^2 + n$
Número de segmentos azules	2	6	12	20	30	10100	$n(n + 1) = n^2 + n$
Número total de segmentos	4	12	24	40	60	20200	$2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$

d) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

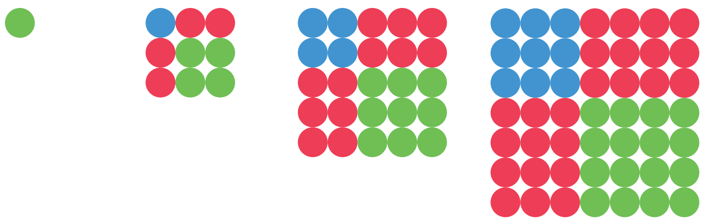


Figura	1	2	3	4	5	100	n
Número de círculos verdes	1	4	9	16	25	10000	n^2
Número de círculos azules	0	1	4	9	16	9801	$(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$
Número de círculos rojos	0	4	12	24	40	19800	$2n(n - 1) = 2n^2 - 2n$
Número total de círculos	1	9	25	49	81	39601	$(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 =$

- Con ayuda del profesor, comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Si en algún inciso obtuvieron expresiones generales algebraicas distintas para el enésimo término, verifiquen si son equivalentes; si no lo son, averigüen cuál es la correcta.

BLOQUE 4

Secuencia 1 / lección 63

Sucesiones cuadráticas

CONTENIDO: Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

1. Completa la tabla. En algunos casos hay más de una respuesta correcta.

Sucesión	Expresión algebraica general para calcular el enésimo término	¿Aumenta o disminuye de manera constante?	¿Crece o decrece?
6, 9, 14, 21, 30, 41, 54, …	$n^2 + 5$	No.	Siempre crece.
R. T. 8, 6, 4, 2, 0, −2, …	R. T. $10 - 2n$	Sí.	Siempre decrece.
−3, −12, −27, −48, −75, −108, −147, …	$-3n^2$	No.	Siempre decrece.
R. T. 4, 7, 10, 13, 16, 19, …	R. T. $3n + 1$	Sí.	Siempre crece.
−4, −6, −6, −4, 0, 6, 14, …	$n^2 - 5n$	No.	Primero decrece y después crece.
18, 12, 2, −12, −30, −52, −78, …	$-2n^2 + 20$	No.	Siempre decrece.
49, 46, 41, 34, 25, 14, 1, …	$50 - n^2$	No.	Siempre decrece.
9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, …	$-n^2 + 10n$	No.	Primero crece y después decrece.

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de la tabla con las de tus compañeros. Mencionen en qué casos hay más de una respuesta correcta. Al terminar, lean la siguiente información y proporcionen más ejemplos de sucesiones de segundo grado.



Hay sucesiones numéricas cuya expresión algebraica es de **primer grado**, por ejemplo, la sucesión **7, 12, 17, 22, 27, …** cuya expresión algebraica es **$5n + 2$**. Los términos que corresponden a este tipo de sucesiones varían de **manera constante**, es decir, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma.

También hay sucesiones cuya expresión algebraica es de **segundo grado**, por ejemplo, la sucesión 3, **8, 15, 24, 35, …** cuya expresión es **$n^2 + 2n$**. Este tipo de sucesiones, a diferencia de las de primer grado, **no cambian de manera constante**, es decir, la diferencia entre dos términos consecutivos varía.

2. Subraya la expresión algebraica correspondiente al enésimo término de la sucesión 0, −3, −8, −15, −24, …

» $n^2 - 1$ » $n^2 - n$ » <u>$-n^2 + 1$</u> » $-n^2 + n$

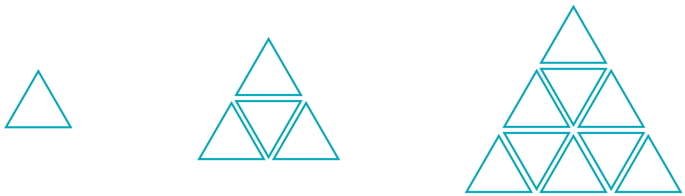
a) ¿Qué número corresponde al lugar 100 de la sucesión? −9999

b) ¿Qué lugar de la sucesión corresponde al número −99? $n = 10$

c) ¿El número −999 999 pertenece a la sucesión? Sí ¿Cómo lo sabes? R. T.

Porque $-(1000)^2 + 1 = -999999$

3. **Encuentra la expresión algebraica para el número de triángulos de la figura *n*.**



Expresión: n^2

a) ¿Cuántos triángulos tendrá la figura 80 de la sucesión? 6400

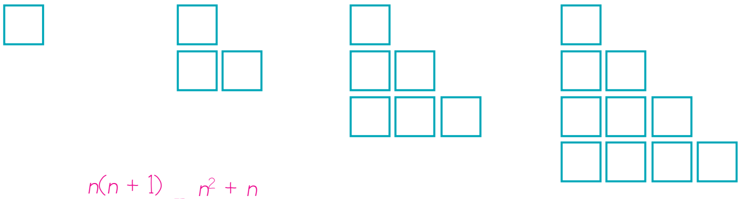
b) ¿Qué número de figura tendrá 10 000 triángulos? $n = 100$

c) ¿Alguna figura de la sucesión tendrá 600 triángulos? No.

validar

¿Cómo lo sabes? $n = \sqrt{600}$ no es un número entero y n debe ser entero.

4. **Trabaja en equipo. Hallen la expresión algebraica para el número de cuadrados de la figura *n*.**



Expresión: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

5. **Anota, para cada caso, lo que se pide. Ten en cuenta que ninguna de las siguientes sucesiones puede ser alguna que haya aparecido antes en esta secuencia.**

a) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que siempre crezca:

R. T. 2, 8, 18, 32, 50 Expresión algebraica del enésimo término: R. T. $2n^2$

b) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que siempre decrezca:

R. T. 2, −1, −6, −13, −22 Expresión algebraica del enésimo término: R. T. $3 - n^2$

c) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que primero crezca y después decrezca: R. T. −9, −4, −1, 0, 1 Expresión algebraica del enésimo término: R. T. $-(n-4)^2$

conect@mos

Descarga la actividad de sucesiones cuadráticas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, reúnete con algunos compañeros y resuman, entre todos, el método usado en la actividad para hallar la expresión algebraica de una sucesión cuadrática.

BLOQUE 4

Secuencia 2/ lección 64

Girar una figura produce otra figura

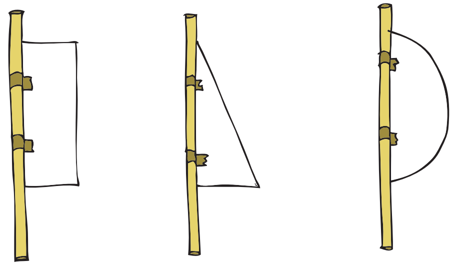
CONTENIDO

Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

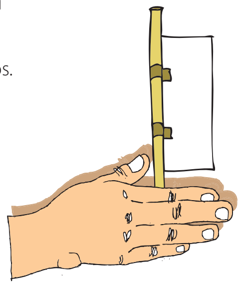
Los conos y los cilindros tienen características en común; una de ellas es que pueden generarse al girar una figura geométrica. ¿Qué figura debes girar para generar un cilindro? ¿Y un cono? Dado que tienen una cara curva, trazar plantillas para construir cilindros y conos no es fácil, pero al estudiar estas lecciones aprenderás a hacerlo.

1. Trabaja en equipo. Tracen en cartulina un rectángulo de 12 cm × 5 cm; un triángulo rectángulo cuyos lados midan 9 cm, 12 cm y 15 cm; y un semicírculo de 8 cm de radio. Recorten las figuras.

Peguen cada figura en un popote o en un palo pequeño, como se muestra.



Coloquen entre sus manos los popotes, uno por uno, y gírenlos.



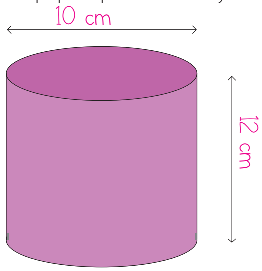
a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera al girar el triángulo?

Un cono

b) ¿Y al girar el rectángulo? Un cilindro

c) ¿Y al girar el semicírculo? Una esfera

d) Anoten junto a las flechas las medidas del cilindro que se genera al girar el rectángulo. Consideren que lo pegaron al popote por el lado mayor.

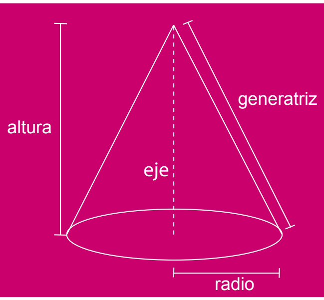


Reflexionamos

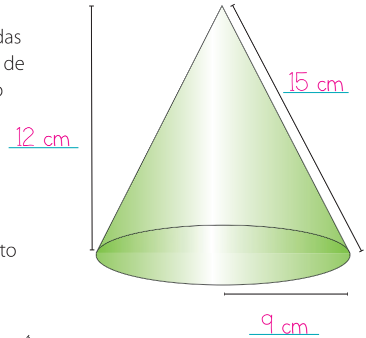
Otra manera de generar un cilindro es con un círculo. ¿Qué movimiento (simetría, traslación o rotación) debes aplicar al círculo para generar el cilindro?

2. Lee, en equipo, la siguiente información. Después hagan lo que se indica. resolver

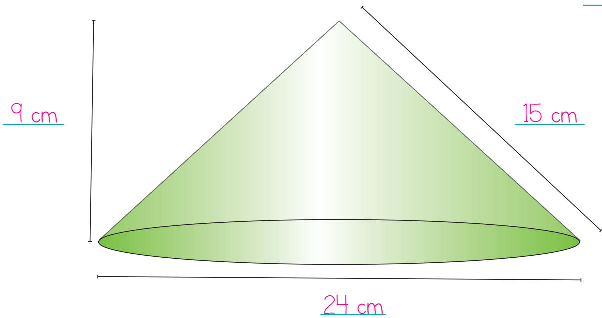
Al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, la hipotenusa genera un cono recto. El eje sobre el cual giró el triángulo se nombra eje del cono, y coincide con su altura. La hipotenusa que genera el cono se llama **generatriz**.



a) Anoten en la figura de la derecha las medidas del cono que se genera al girar el triángulo de cartulina que elaboraron. Recuerden que lo pegaron al popote por el cateto mayor.

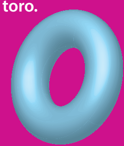


b) Imaginen que el triángulo de la actividad 1 se girará tomando como eje de giro el cateto más corto. Anoten en la figura de abajo las medidas del nuevo cono que se genera.



Reflexionamos

La siguiente figura recibe el nombre de toro.



¿Cómo puede generarse un toro a partir de un círculo?

- Con ayuda del profesor, comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si algunas medidas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Después, lean lo siguiente y hagan lo que se indica.

Los cuerpos geométricos que se generan al girar una figura geométrica sobre un eje reciben el nombre de **cuerpos de revolución**. Estos son diferentes a los poliedros porque tienen al menos una cara curva y pueden no tener caras planas.

» Dibujen, en su cuaderno y a partir de la información anterior, tres cuerpos de revolución. Indiquen cuántas caras curvas y cuántas caras planas tiene cada uno.

BLOQUE 4

Secuencia 2 / lección 65

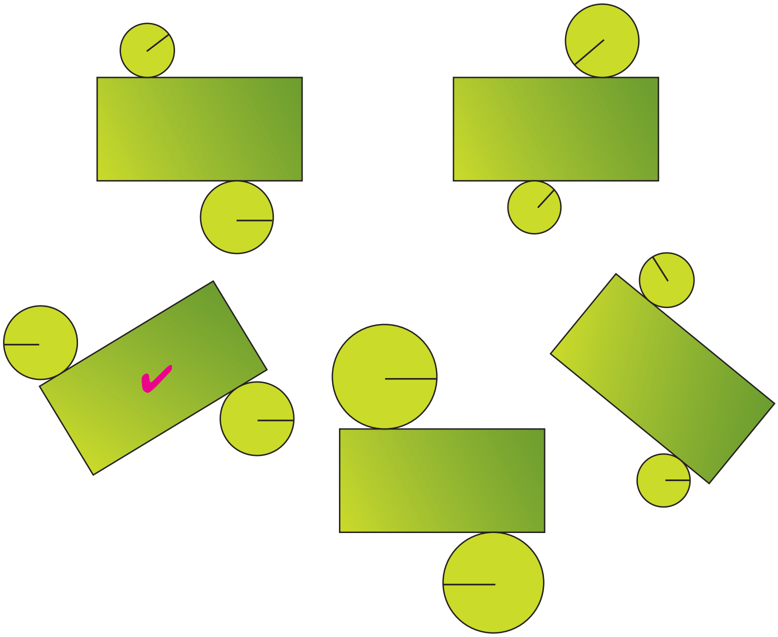
¿Cómo se hace un cilindro?

CONTENIDO

Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

validar

1. Marca, de los siguientes desarrollos planos, el que sirva para formar un cilindro. Explica en tu cuaderno por qué los demás no sirven. Si no estás seguro de tu respuesta, calca el desarrollo plano que consideres correcto y recórtalo para construir el cilindro.



* Revisa, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Contesten lo siguiente.

¿Qué características debe tener un desarrollo plano para que, a partir de éste, se pueda elaborar un cilindro? El perímetro del círculo debe medir lo mismo que un lado del rectángulo y los círculos deben ser iguales.

2. Lleva a cabo, en equipo, lo siguiente. Consideren 3.14 como valor de π. Elaboren una figura por cada integrante del equipo.

a) Tracen una plantilla para elaborar un cilindro con las siguientes medidas.

Altura del cilindro: 6 cm   Perímetro de la base: 15 cm

b) Recorten y peguen la plantilla para formar el cilindro.

conect@mos

Aprende más acerca del cilindro y el cono en

www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/andared02/geometria3/estereometro.swf

Prueba todas las opciones y modifica las propiedades de cada cuerpo. Al finalizar, redacta en tu cuaderno dos métodos distintos para generar un cono y otros dos para generar un cilindro.

Ya sabemos...

El perímetro de un círculo se calcula con la fórmula $P = \pi d$ o, lo que es lo mismo, $P = 2\pi r$, donde d es el diámetro y r es el radio del círculo.

c) Comparen su cilindro con el de sus compañeros de equipo. Verifiquen que la altura mida 6 cm y el perímetro de la base, 15 cm.

- **Analicen, con ayuda del profesor, los procedimientos que utilizaron para trazar la plantilla. Luego contesten lo siguiente.**

a) ¿Cuánto mide el rectángulo con el que se forma la cara curva del cilindro?

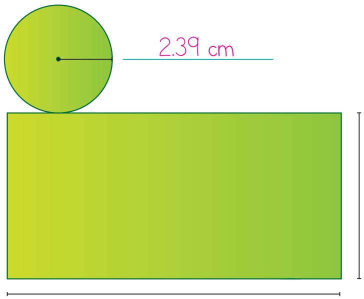
Largo: 15 cm   Ancho: 6 cm

b) De las medidas anteriores, ¿cuál coincide con la altura del cilindro? Ancho

c) ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias que trazaron? $\frac{15}{2\pi} = 2.39$ cm

d) ¿Cómo calcularon la medida del radio? R. T. Despejando r de la fórmula $P = 2\pi r$ ($r = \frac{P}{2\pi}$). Se divide 15 entre 2π.

e) Anoten, en el siguiente dibujo, las medidas que utilizaron para elaborar el cilindro.



f) Lean la siguiente información y respondan.

La cara lateral de un cilindro es un rectángulo cuyas medidas corresponden a la altura del cuerpo y al perímetro de su base.

g) ¿Que medidas tiene la cara lateral de un cilindro de 10 cm de altura y 5 cm de radio?

10 cm × 31.415 cm

h) Consigue una lata con forma cilíndrica. Toma las medidas necesarias y calcula las dimensiones de su cara lateral.

Largo del rectángulo: R. P.   Ancho del rectángulo: R. P.

BLOQUE 4

Secuencia 2 / lección 66

¿Cómo se construye un cono?

CONTENIDO Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

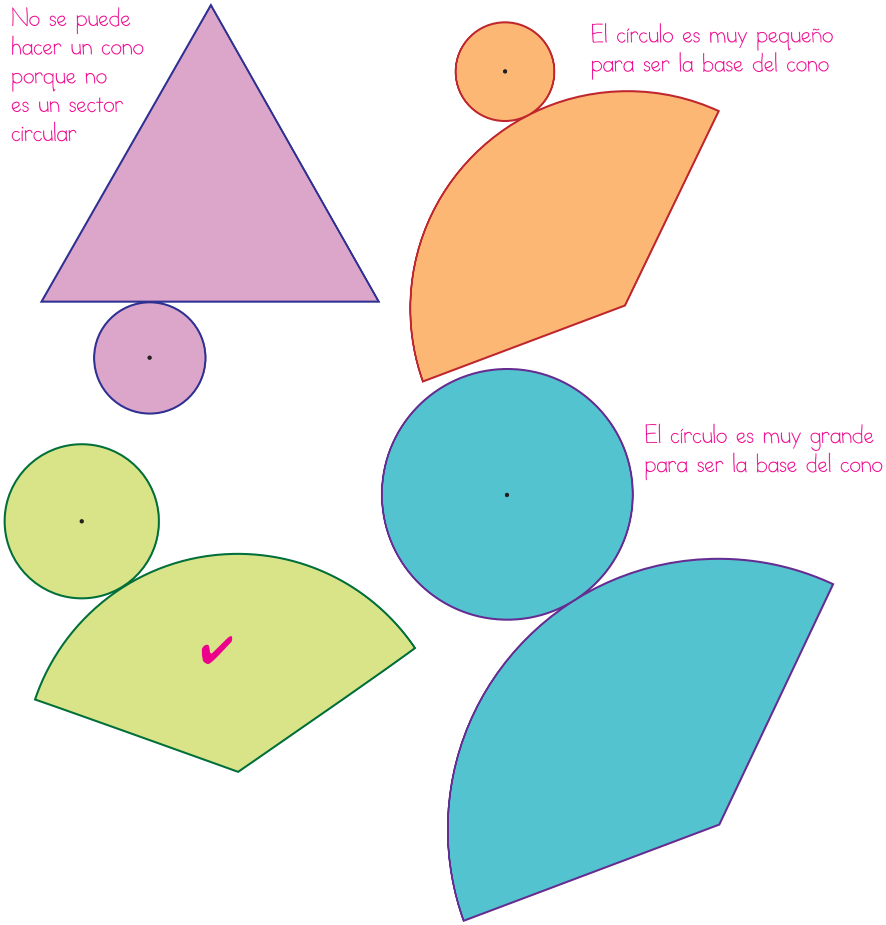
validar

En contexto

Conoce la relación de los conocimientos matemáticos con diversos cuerpos de la naturaleza en *Del punto al cuerpo*, de la Biblioteca de Aula.

Reyes Coix, Luis Gerardo, *Del punto al cuerpo*, México, SEP-Oxford University Press, serie Astrolabio, 2007.

1. Marca la plantilla con la que se pueda elaborar un cono; escribe junto a las otras por qué no se puede formar un cono con ellas.



2. Haz, con un compañero, lo que se indica.

a) Tres de las figuras presentadas arriba constan de un sector circular y un círculo, elementos necesarios para elaborar un cono. Sin embargo, sólo en una el arco del sector circular tiene la misma longitud que la circunferencia del círculo. ¿Cuál es? Verifiquen que la figura que marcaron en la actividad 1 sea ésta.

sm

b) Trabaja en equipo. Lean la siguiente información y verifiquen su respuesta del inciso anterior. Tengan en cuenta que en el recuadro se utiliza un ángulo de 73°, pero el ángulo de la plantilla que ustedes eligieron puede ser distinto.

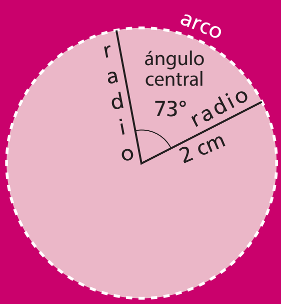
Para calcular la longitud de un arco, se debe tener en cuenta lo siguiente: si una circunferencia de 2 cm de radio estuviera completa mediría

$2\pi r$, que es aproximadamente $2(3.14)(2) = 12.56$ cm.

Esto corresponde a los 360° de la circunferencia completa.

En el siguiente ejemplo, el arco sólo abarca un ángulo de 73°, por lo que se plantea el siguiente problema.

En una circunferencia con 2 cm de radio, a un ángulo de 360° le corresponde una circunferencia de 12.56 cm. ¿Qué longitud le corresponde a uno de 73°?



* Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.

  a) Comparen sus resultados de las actividades anteriores.

  b) Comprueben, mediante cálculos, en qué figuras de la actividad 1 la longitud del círculo y la del arco del sector circular coinciden. ¿Cuál es su medida? En la figura verde y su medida es de 8.16 cm

Una pista

Recuerda tus lecciones de proporcionalidad: 360° es a 12.56 como 73° es a…

3. Haz, en equipo, lo siguiente.

  a) Tracen, en una hoja blanca o en un pedazo de cartoncillo, la plantilla para construir un cono con las medidas que se indican a continuación. No olviden ponerle pestañas a la plantilla para pegarla fácilmente.

  Radio del sector circular: 8 cm
  Ángulo central: 120°

  b) Recorten la plantilla y armen el cono.

  c) Comparen su cono con los de los otros equipos para comprobar si son iguales.

  d) ¿Cuál es la altura del cono que elaboraron? 7.54 cm

Una pista

Identifiquen un triángulo rectángulo en el interior del cono y usen el teorema de Pitágoras.

* Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; si algunas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Luego redacten, entre todos, los pasos para trazar las plantillas de un cilindro y de un cono. Mencionen, en cada caso, con qué medida de la cara lateral se relaciona la circunferencia de la base.

BLOQUE 4

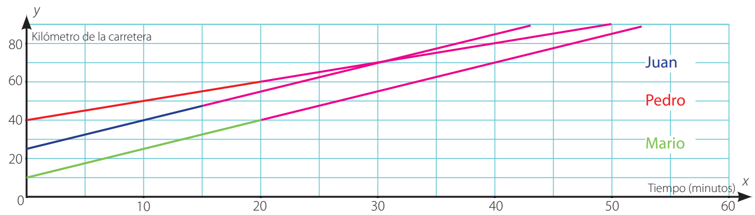
Secuencia 3 / lección 67

Ángulo de inclinación y pendiente

CONTENIDO Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

En lecciones anteriores estudiaste que la pendiente de una recta trazada en el plano cartesiano tiene un valor numérico. ¿Cómo se determina ese valor? ¿Qué relación hay entre dicho valor y el ángulo que forma la recta con el eje x? Resolverás este tipo de preguntas al concluir el estudio de esta secuencia.

1. Resuelve en equipo. Tres amigos se reunirán en el kilómetro 90 de una carretera. Las gráficas muestran la relación entre el tiempo transcurrido y el lugar de la carretera en que se encuentra cada uno.



a) ¿Quién se traslada con mayor velocidad? Juan y Mario

b) ¿Quién va más despacio? Pedro

c) Si continúan al mismo ritmo, ¿quién llegará primero? Juan

d) ¿Quién será el último? Mario

Una pista

Puedes prolongar las líneas hasta que lleguen al kilómetro 90.

2. Las siguientes expresiones algebraicas corresponden a las tres rectas de la actividad anterior.

$y = x + 40$ $\qquad$ $y = \frac{3}{2}x + 25$ $\qquad$ $y = \frac{3}{2}x + 10$

a) Completa la tabla; indica a quién corresponde cada expresión.

Amigo	Expresión	Pendiente de la recta
Mario	$y = \frac{3}{2}x + 10$	$\frac{3}{2}$
Juan	$y = \frac{3}{2}x + 25$	$\frac{3}{2}$
Pedro	$y = x + 40$	1

Ya sabemos...

Las gráficas de las expresiones $y = mx + b$ son líneas rectas: b es la ordenada del punto donde la gráfica corta el eje y; m es la pendiente de la recta.

b) ¿Cómo se sabe, a partir de las expresiones algebraicas, quién se traslada con mayor rapidez?

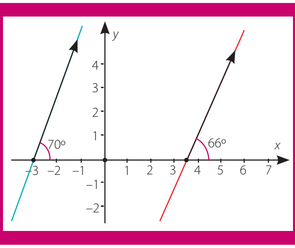
R. T. A mayor pendiente, mayor velocidad.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Expliquen en su cuaderno cómo se relaciona la pendiente de cada recta con la velocidad.

3. Trabaja con un compañero. Lean la siguiente información y efectúen lo que se pide.

En las rectas azul y roja se ha marcado su ángulo de inclinación; el de la recta azul mide 70° y el de la roja, 66°.

Advierte que el ángulo de inclinación de una recta está formado por la misma recta y el eje *x*.



a) Tracen en su cuaderno las siguientes rectas en un plano cartesiano. Midan el ángulo de inclinación de cada una.

$y = 2x$ $y = 4x$ $y = \frac{1}{2}x$ $y = \frac{1}{3}x$

$y = x$ $y = 0.1x$ $y = 30x$ $y = 3x$

b) Completa la tabla. Debes ordenar los datos de mayor a menor ángulo de inclinación (respecto al eje *x*).

Ecuación de la recta	Medida del ángulo de inclinación	Pendiente
$y = 30x$	88.0905°	30
$y = 4x$	75.9638°	4
$y = 3x$	71.5651°	3
$y = 2x$	63.4349°	2
$y = x$	45°	1
$y = \frac{1}{2}x$	26.565°	$\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{3}x$	18.4349°	$\frac{1}{3}$
$y = 0.1x$	5.7106°	$\frac{1}{10}$

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Comenten en qué casos la recta se acerca más a una posición vertical y en cuáles, a una posición horizontal. Después lean la siguiente información.

Dos rectas con la misma pendiente también tienen el mismo ángulo de inclinación.

Ya sabemos...

Para trazar una recta, basta localizar dos puntos de la misma.

comunicar

conect@mos

Investiga más acerca de ángulos y pendientes de rectas en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/pendiente_carretera/actividad.html

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

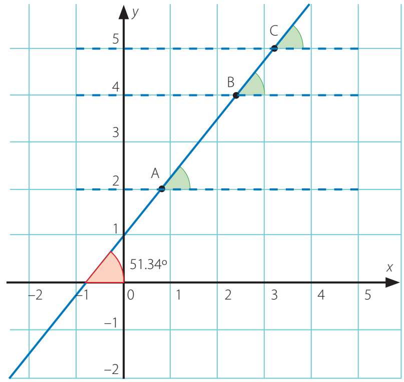
Secuencia 3 / lección 68

Triángulos rectángulos en el plano

CONTENIDO
Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

1. **En el siguiente plano cartesiano se ha marcado con rojo el ángulo de inclinación de la recta azul.**

En los puntos **A**, **B** y **C** se trazaron rectas paralelas al eje *x*.



a) ¿Los ángulos marcados con vértice en **A**, **B** y **C** miden lo mismo que el ángulo de inclinación de la recta azul?

Sí

validar

b) Argumenta tu respuesta. R. T. Si los ángulos formados no fueran iguales, las rectas punteadas no serían paralelas.

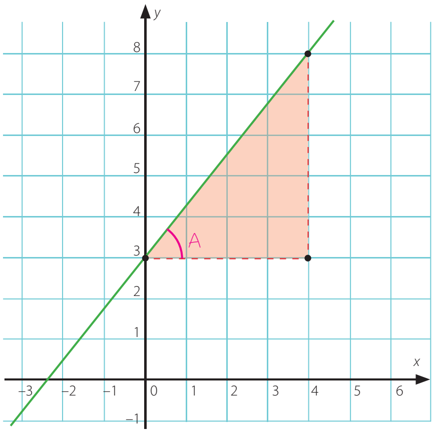
Una pista

Recuerda lo que estudiaste en segundo grado acerca de ángulos entre paralelas y una secante.

2. **Considera la recta verde del siguiente plano cartesiano. Se ha trazado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está sobre la recta.**

a) ¿Cómo comprobarías que la ecuación de la recta es $y = \frac{5}{4}x + 3$? R. T. Sustituyendo en la ecuación dada los puntos A(0,3) y B(4,8), para comprobar que satisfagan la igualdad. Por ejemplo, evaluando en (4,8): $\frac{5}{4}(4) + 3 = 8 = y$.

b) Compruébalo.



c) ¿Cuánto vale la pendiente de la recta? $\frac{5}{4}$

d) Señala en el triángulo el ángulo que corresponde a la inclinación de la recta y nómbralo **A**.

e) Escribe, como fracción, el resultado de dividir la medida del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo **A**.

$\frac{5}{4}$

f) Compara tu resultado con la pendiente de la recta. ¿Qué observas? R. T. Coinciden. El cociente es igual a la pendiente.

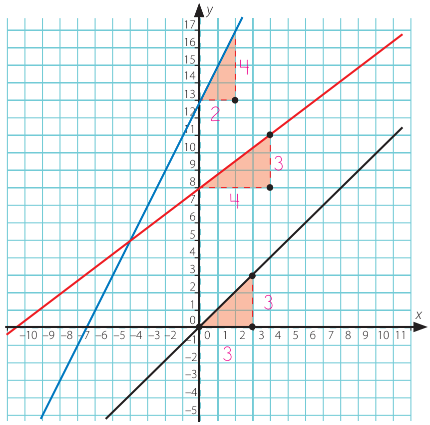
3. Haz lo que se indica a continuación.

a) Escribe al lado de cada ecuación el color de la recta que le corresponde según el plano de la derecha.

$y = x$ ___negro___

$y = \frac{3}{4}x + 8$ ___rojo___

$y = 2x + 13$ ___azul___



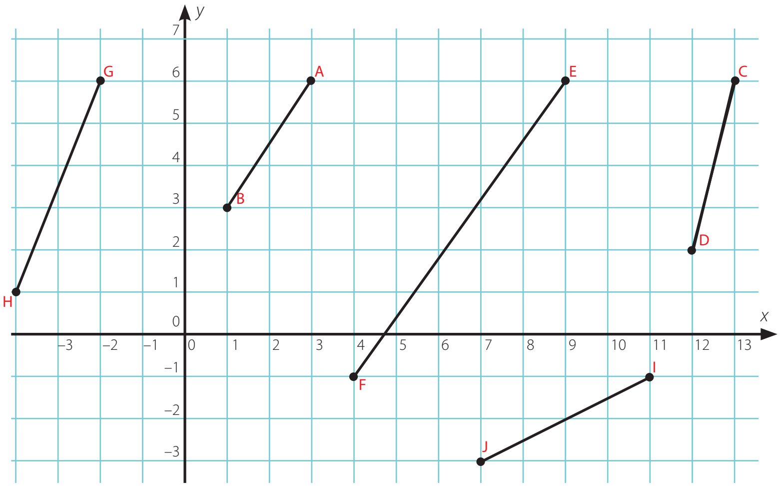
b) Anota en cada triángulo las medidas del cateto opuesto y las del cateto adyacente al ángulo que es igual al ángulo de inclinación de la recta.

c) Calcula el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente y compáralo con la pendiente de la recta. Los cocientes son iguales a las pendientes.

* Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Compárenla con lo trabajado en esta lección.

Cuando en un plano cartesiano se traza un triángulo rectángulo y su hipotenusa está sobre una recta cuyo ángulo de inclinación es agudo, se sabe que…
- uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo es igual al ángulo de inclinación de la recta;
- el cociente del cateto opuesto a ese ángulo entre el cateto adyacente siempre es igual a la pendiente de la recta. A ese cociente se le llama **tangente del ángulo**.

4. En el siguiente plano se han trazado distintos segmentos de rectas. Anota junto a cada uno la pendiente de la recta que le corresponda.



resolver

segmento GH $\frac{5}{2}$

segmento AB $\frac{3}{2}$

segmento EF $\frac{7}{5}$

segmento CD 4

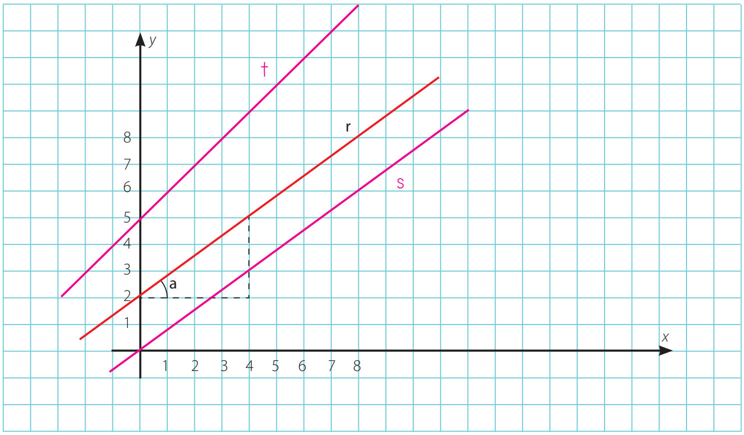
segmento IJ $\frac{2}{4}$

Más ejercicios sobre tangente y pendiente

CONTENIDO

Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

1. Haz, en equipo, lo que se pide, con base en la información del plano cartesiano.



Reflexionamos

¿Habrá una recta con pendiente 0? ¿Cómo debería ser? ¿Cómo es su ecuación?

a) Anoten en la siguiente tabla los datos que corresponden a la recta **r**.

b) Tracen en el plano las rectas **t** y **s**, de acuerdo con los datos proporcionados en la tabla.

c) Completen la tabla.

	Ordenada al origen	Ángulo de inclinación	Pendiente de la recta	Regla de correspondencia
Recta **r**	2	37º	$\frac{3}{4}$	$y = \frac{3}{4}x + 2$
Recta **t**	5	45º	1	$y = x + 5$
Recta **s**	0	37º	$\frac{3}{4}$	$y = \frac{3}{4}x$

- Revisen, con ayuda del profesor, los datos de la tabla y las rectas que trazaron. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y corrijan lo que sea necesario.

2. Lee, con dos compañeros, la siguiente información. Comenten, con el grupo y con ayuda del profesor, lo que entendieron.

Para calcular el valor de la **tangente** que le corresponde al ángulo **a** se puede proceder de dos maneras.

- Primera: se divide la medida del cateto opuesto al ángulo **a** entre la medida del cateto adyacente. Por ejemplo, en el plano de la actividad 1, la tangente de **a** es $\frac{3}{4}$.
- Segunda: se introduce, en una calculadora que tenga razones trigonométricas, la medida del ángulo, por ejemplo, (37), y luego se presiona la tecla de tangente (tan).

3. Haz, en equipo, lo que se indica para las siguientes expresiones algebraicas.

resolver

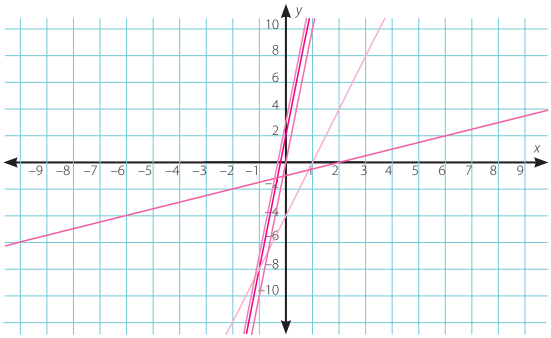
$y = 10x + 2$

$y = 4x - 4$

$y = \frac{1}{2}x - 1$

$y = 10x + 3$

$y = 10x$



a) Grafiquen en el plano cartesiano cada expresión.

comunicar

b) Completen la siguiente tabla ordenando las tangentes de mayor a menor.

Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta
10	10	10	4	$\frac{1}{2}$

c) ¿Qué recta tiene mayor ángulo de inclinación? R. T. Las de pendiente 10.

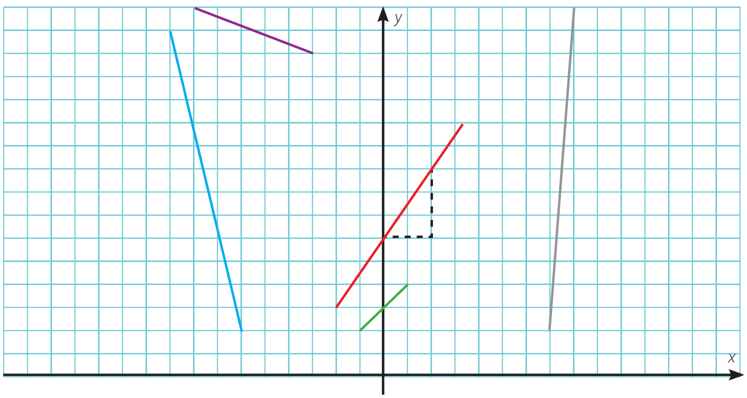
d) ¿Cuál tiene menor ángulo de inclinación? $y = \frac{1}{2}x - 1$

e) Expliquen en su cuaderno cómo debe ser la pendiente de una recta paralela al eje *y* o al eje *x*. R. T. Si la recta es paralela al eje x, la pendiente es cero. Si la recta es paralela al eje y, la pendiente no está definida.

4. En el siguiente plano hay varias rectas. Calcula la tangente del ángulo de inclinación de cada una, como en el ejemplo.

Rojo	Morado	Azul	Verde	Gris
$\frac{3}{2}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-13}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{14}{1}$

técnicas



conect@mos

Refuerza tus conocimientos acerca de la tangente en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/sol_luna/actividad.html

Trabaja en equipo. Asignen, con ayuda del profesor, las actividades propuestas, de manera que cada equipo resuelva una distinta. Contesten las preguntas y, al finalizar, expliquen al resto del grupo lo que aprendieron.

BLOQUE 4

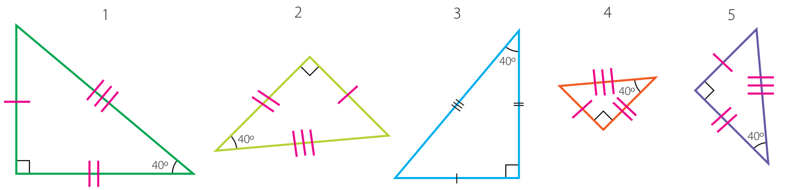
Secuencia 4 / lección 70

Semejanza y cocientes

CONTENIDO Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

¿Sabías que, en las figuras proporcionales, las razones entre los lados de una figura son iguales a las razones correspondientes en la otra? Por ejemplo, si en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide el triple del cateto largo, entonces en cualquier triángulo semejante sucede lo mismo. En esta secuencia explorarás la propiedad descrita.

1. Trabaja en equipo. Hagan, con base en los siguientes triángulos, lo que se indica.



validar

a) Expliquen en su cuaderno por qué se puede asegurar que estos triángulos son semejantes.

b) El cateto marcado con una raya en el triángulo 3 es el **cateto opuesto** al ángulo de 40° (porque está frente al ángulo). El marcado con dos rayas se llama **cateto adyacente** al ángulo de 40° (porque forma parte del ángulo). La hipotenusa está marcada con tres rayas. Marquen de la misma manera los otros triángulos.

Ya sabemos...

Dos triángulos son semejantes si los tres ángulos de uno tienen las mismas medidas que los del otro.

c) Midan con regla los catetos y la hipotenusa de cada triángulo y, a partir de los datos que tomen, completen la siguiente tabla. Usen calculadora y redondeen a centésimos.

$\frac{CO}{H}$ quiere decir "medida del cateto opuesto entre medida de la hipotenusa".

$\frac{CA}{H}$ significa "medida del cateto adyacente entre medida de la hipotenusa".

$\frac{CO}{CA}$ quiere decir "medida del cateto opuesto entre medida del cateto adyacente".

Ya sabemos...

El cociente $\frac{CO}{CA}$ se llama tangente.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1 R. T.	2.5 cm	3 cm	4 cm	0.625	0.75	0.833
2	1.9 cm	2.2 cm	3 cm	0.633	0.733	0.863
3	2.2 cm	2.5 cm	3.3 cm	0.667	0.757	0.88
4	1.1 cm	1.3 cm	1.7 cm	0.647	0.764	0.846
5	1.5 cm	1.8 cm	2.3 cm	0.652	0.782	0.833

- Comparen sus tablas con las de sus compañeros. Recuerden que puede haber pequeñas diferencias debido a imprecisiones de medición. Expliquen en su cuaderno por qué en las últimas tres columnas hay valores que se repiten.

2. Trabaja con dos compañeros. Determinen si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). En caso de hallar una falsa, tracen en su cuaderno un triángulo mediante el cual sea evidente que dicha afirmación no se cumple.

a) La medida de la hipotenusa siempre es mayor que la de cualquiera de los catetos. V

b) La medida del cateto opuesto a un ángulo de 40° siempre será mayor que la medida del cateto adyacente. F

c) Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°, entonces el triángulo es semejante a todos los triángulos de la actividad 1. V

d) En cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 40°, el cociente de la medida del cateto opuesto entre la del cateto adyacente al ángulo de 40° siempre será 0.84. V

e) Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°, el cateto opuesto a ese ángulo es más grande que el cateto adyacente. F

3. Consideren el otro ángulo agudo de los triángulos de la actividad 1.

a) ¿Cuánto mide? 50°

b) Identifiquen en cada triángulo los catetos opuesto y adyacente a dicho ángulo. Después completen la siguiente tabla.

técnicas

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1	3 cm	2.5 cm	4 cm	0.75	0.625	1.2
2	2.2 cm	1.9 cm	3 cm	0.733	0.633	1.157
3	2.5 cm	2.2 cm	3.3 cm	0.757	0.667	1.136
4	1.3 cm	1.1 cm	1.7 cm	0.764	0.647	1.1818
5	1.8 cm	1.5 cm	2.3 cm	0.782	0.652	1.2

c) Los cocientes de la quinta columna de esta tabla coinciden con los de la sexta columna de la tabla de la actividad 1.

Expliquen por qué. R. T. El cateto opuesto y el adyacente se intercambiaron.

d) Expliquen cómo debería ser un triángulo rectángulo para que el cociente $\frac{CO}{CA}$ de uno de sus ángulos valiera 1. R. T. Debería tener un ángulo de 45°

✷ Comparen, con ayuda del profesor, sus tablas con las de sus compañeros. Comenten cómo se relacionan las tablas de las actividades 1 y 3.

Una pista

En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a uno de los ángulos se convierte en el cateto adyacente a otro ángulo, y viceversa: el cateto adyacente a un ángulo es el cateto opuesto a otro.

BLOQUE 4

Secuencia 4 / lección 71

Los cocientes coinciden

CONTENIDO: Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

1. Considera triángulos rectángulos con las medidas indicadas en cada recuadro.

Triángulo 1
Medida de los catetos: 4 cm y 3 cm
Medida de la hipotenusa: 5 cm

Triángulo 2
Medida de los catetos: 1 cm y 0.75 cm
Medida de la hipotenusa: 1.25 cm

Triángulo 3
Medida de los catetos: 2 cm y 1.5 cm
Medida de la hipotenusa: 2.5 cm

Triángulo 4
Medida de los catetos: 8 cm y 6 cm
Medida de la hipotenusa: 10 cm

Triángulo 5
Medida de los catetos: 5 cm y 12 cm
Medida de la hipotenusa: 13 cm

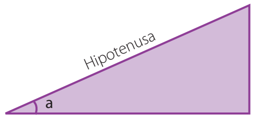
Triángulo 6
Medida de los catetos: 2.5 cm y 6 cm
Medida de la hipotenusa: 6.5 cm

Triángulo 7
Medida de los catetos: 15 cm y 36 cm
Medida de la hipotenusa: 39 cm

Triángulo 8
Medida de los catetos: 12 cm y 9 cm
Medida de la hipotenusa: 15 cm

técnicas

a) Usa el triángulo de la derecha como modelo. Utiliza las medidas de los ocho triángulos anteriores y completa la tabla.



Triángulo	Medida del cateto opuesto al ángulo a	Medida del cateto adyacente al ángulo a	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1	3 cm	4 cm	5 cm	0.6	0.8	0.75
2	0.75 cm	1 cm	1.25 cm	0.6	0.8	0.75
3	1.5 cm	2 cm	2.5 cm	0.6	0.8	0.75
4	6 cm	8 cm	10 cm	0.6	0.8	0.75
5	5 cm	12 cm	13 cm	0.384	0.923	0.416
6	2.5 cm	6 cm	6.5 cm	0.384	0.923	0.416
7	15 cm	36 cm	39 cm	0.384	0.923	0.416
8	9 cm	12 cm	15 cm	0.6	0.8	0.75

b) En la tabla hay dos grupos de triángulos: los semejantes al triángulo 1 y los semejantes al triángulo 5. ¿Cuáles están en un grupo y cuáles en el otro?

Triángulos semejantes al 1: Triángulos 2, 3, 4 y 8.

Triángulos semejantes al 5: Triángulos 6 y 7.

c) Explica por qué, en los triángulos semejantes, el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa siempre vale lo mismo. R. T. Porque la proporción entre sus lados no cambia.

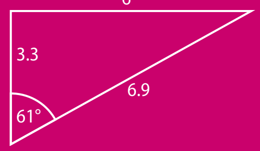
✹ **Compara tus resultados con los del resto del grupo. Luego comenten, con ayuda de su profesor, la siguiente información.**

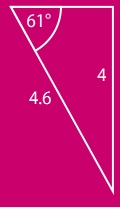
Si en dos o más triángulos rectángulos semejantes se considera el mismo ángulo agudo, entonces el cociente $\frac{CO}{H}$ tiene el mismo valor en todos los casos; lo mismo sucede con los cocientes $\frac{CA}{H}$ y $\frac{CO}{CA}$. Esto significa que dichos cocientes sólo dependen de la forma del triángulo, no de su tamaño.

$\frac{CO}{H} = \frac{6}{6.9} = 0.87$

$\frac{CA}{H} = \frac{3.3}{6.9} = 0.48$

$\frac{CO}{CA} = \frac{6}{3.3} = 1.82$





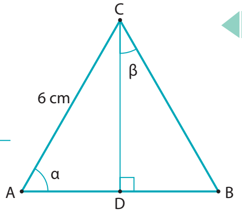
$\frac{CO}{H} = \frac{4}{4.6} = 0.87$

$\frac{CA}{H} = \frac{2.2}{4.6} = 0.48$

$\frac{CO}{CA} = \frac{4}{2.2} = 1.82$

2. **En el triángulo equilátero ABC se trazó una de las alturas.**

resolver



a) ¿Cuánto mide el ángulo **α** (alfa)? 60° ¿Y el **β** (beta)? 30°

b) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BD}$? 3 cm ¿Y el $\overline{CD}$? 5.196 cm

c) Calcula los siguientes cocientes respecto al ángulo indicado.

Respecto al ángulo…	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
α	0.865	0.5	1.73
β	0.5	0.865	0.58

d) Si el triángulo equilátero fuera de distinto tamaño, ¿los cocientes anteriores cambiarían?

validar

No Justifica tu respuesta. Los triángulos equiláteros son semejantes entre sí.

3. **Trabaja en equipo. Respondan lo siguiente.**

a) Respecto a un ángulo de 45° en un triángulo rectángulo, ¿qué cateto es más grande?

Ninguno ¿Cuánto vale en ese caso el cociente $\frac{CO}{CA}$? 1

b) ¿Y cuando el ángulo mide más de 45°? El cateto opuesto. $\frac{CO}{CA} > 1$.

c) ¿Y cuando mide menos de 45°? El cateto adyacente. $\frac{CO}{CA} < 1$.

BLOQUE 4

Secuencia 5 / lección 72

Seno, coseno y tangente

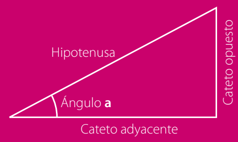
CONTENIDO: Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Probablemente habrás notado que en dos o más triángulos rectángulos semejantes, al considerar un ángulo que mide lo mismo en cada uno, la razón o el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente es la misma. En esta secuencia estudiarás con más detalle las relaciones mencionadas.

1. Comenta, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Después investiguen qué otros cocientes se obtienen a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y cómo se llaman.

En un triángulo rectángulo, para un ángulo **a**, los cocientes que estudiaste en la lección anterior reciben un nombre especial.

- El cociente que se obtiene al dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa se llama **seno** del ángulo **a**.
- El cociente que se obtiene al dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa se llama **coseno** del ángulo **a**.
- El cociente que se obtiene al dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente se llama **tangente** del ángulo **a**.

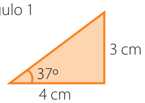


A los cocientes antes mencionados se les llama **razones trigonométricas**.

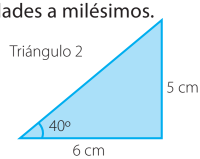
técnicas

2. Calcula y escribe en la primera tabla las razones trigonométricas para el ángulo indicado en cada triángulo. Haz lo mismo en la segunda tabla para el otro ángulo agudo de cada triángulo. Redondea las cantidades a milésimos.

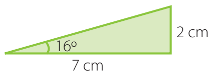
Triángulo 1



Triángulo 2



Triángulo 3



Reflexionamos

¿Qué otros cocientes se obtienen a partir de las medidas laterales de un triángulo rectángulo? Averigua cuáles son y cómo se llaman.

Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (37°) = 0.6018	Coseno (37°) = 0.7986	Tangente (37°) = 0.7535
2	Seno (40°) = 0.6427	Coseno (40°) = 0.766	Tangente (40°) = 0.839
3	Seno (16°) = 0.2756	Coseno (16°) = 0.9612	Tangente (16°) = 0.2867

Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (53°) = 0.7986	Coseno (53°) = 0.6018	Tangente (53°) = 1.327
2	Seno (50°) = 0.766	Coseno (50°) = 0.6427	Tangente (50°) = 1.1917
3	Seno (74°) = 0.9612	Coseno (74°) = 0.2756	Tangente (74°) = 3.487

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Expliquen por qué, en cualquier triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo siempre vale lo mismo que el coseno del otro ángulo agudo.

3. Trabaja en equipo. Usen la información de la figura 1, que está abajo, para responder.

a) ¿Cuál es el valor del coseno de 70°? R. T. 0.342

b) ¿Cuál es el valor del seno de 70°? R. T. 0.9396

c) Calculen las medidas que faltan en las figuras 2 y 3.

Figura 1

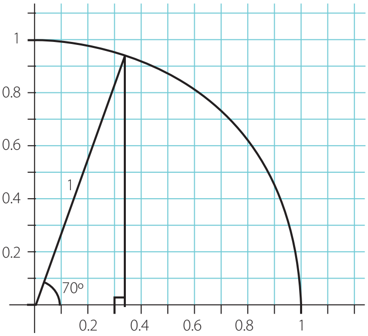


Figura 2

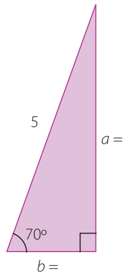


Figura 3

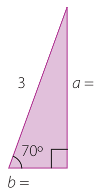


Fig. 2 20° $a = 4.698$ $b = 1.71$
Fig. 3 20° $a = 2.819$ $b = 1.026$

Una pista

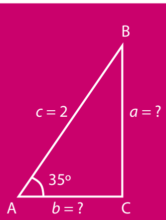
Como la medida de la hipotenusa es 1, basta con determinar la medida del cateto adyacente.

Reflexionamos

Las figuras 1, 2 y 3 son triángulos rectángulos semejantes. ¿Por qué? En la figura 2, la hipotenusa mide cinco veces lo que en la 1. ¿Cuánto deben medir *a* y *b*?

- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Expliquen en su cuaderno qué procedimiento usaron para responder la actividad.

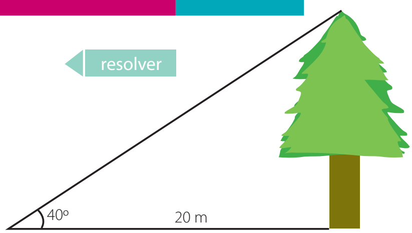
4. Lee la información. Al finalizar, ejemplifica en tu cuaderno el proceso para calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo a partir de las medidas de un ángulo agudo y del cateto adyacente al mismo.



Con las medidas de un lado y de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se pueden obtener las medidas de los otros lados. Por ejemplo, en el triángulo **ABC**, sen 35° $= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{2}$.
Por tanto, $a = 2(\text{sen } 35°)$; y como sen 35° es aproximadamente 0.57 (este valor se puede obtener con una calculadora científica), entonces $a = 2(0.57) = 1.14$.
Una vez que se conocen las medidas de dos lados se puede usar el teorema de Pitágoras para calcular la medida del tercero.

5. Contesta lo siguiente.

resolver



a) ¿Cuánto mide la altura del árbol? 16.78 m

b) Explica el procedimiento que utilizaste para calcularla. R. T.
Como $\frac{h}{20} = \tan(40°)$, entonces $h = 20 \tan(40°)$.

- Compara tu resultado con los de tus compañeros. Comenten si la altura del árbol también se puede calcular por medio de la tangente del ángulo.

Secuencia 5 / lección 73

Calcular ángulos

CONTENIDO

Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

1. Trabaja en equipo. Calculen, en cada triángulo, las medidas marcadas con signo de interrogación.

Figura 1

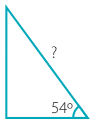


Figura 2

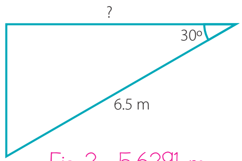


Figura 3

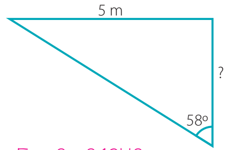


Fig. 1 3.4026 m   Fig 2. 5.6291 m   Fig. 3 3.1243 m

- **Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Después respondan las siguientes preguntas.**

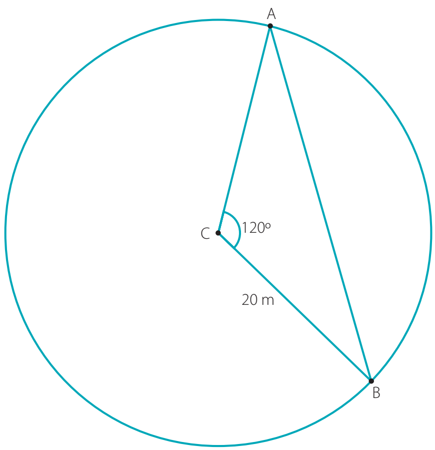
a) ¿Con qué razón trigonométrica se calcula la medida desconocida en cada triángulo?

Fig. 1: coseno   Fig. 2: coseno   Fig. 3: tangente

b) Para obtener la medida desconocida de la figura 2, un estudiante hizo lo siguiente: sen 30° $= \frac{x}{6.5}$; entonces, $x = 6.5$ (sen 30°) $= 6.5(0.5) = 3.25$.

¿En qué se equivocó? R. T. La función indicada es coseno dado que busca el cateto adyacente.

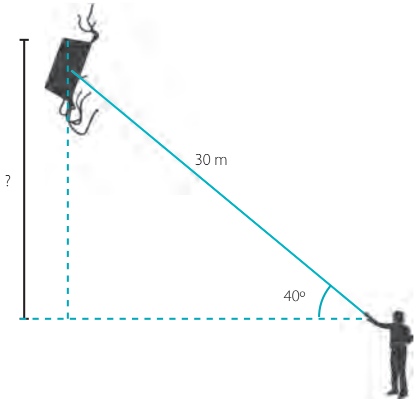
2. Determina, en equipo, la longitud que tiene la cuerda **$\overline{AB}$** en el siguiente círculo.



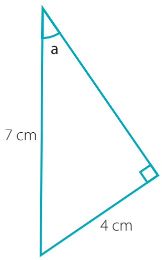
Longitud de la cuerda $\overline{AB}$: 34.641 m

3. Observa la figura y contesta: ¿a qué altura se encuentra el papalote? 19.283 m

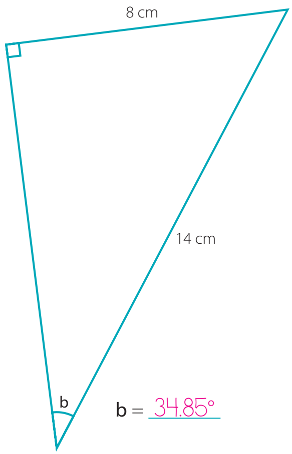
resolver



4. Calcula, en equipo, la medida de los ángulos **a**, **b** y **c** en los siguientes triángulos rectángulos.

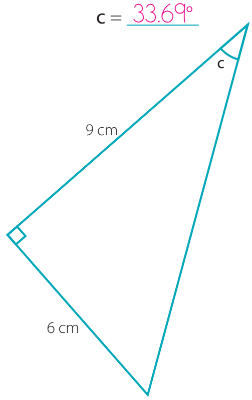


a = 34.85°



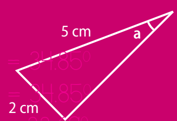
b = 34.85°

c = 33.69°



- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados y procedimientos con los del resto del grupo. Después lean la siguiente información y comenten qué función tiene la tecla INV en la calculadora.

Si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede averiguar la medida de los ángulos agudos con ayuda de una calculadora, como se muestra en el siguiente ejemplo.



El cateto opuesto al ángulo **a** mide 2 cm y la hipotenusa mide 5 cm; entonces, sen **a** = $\frac{2}{5}$ = 0.4.

Con la calculadora, 0.4 INV Sen = 23.6º.

BLOQUE 4

Secuencia 5 / lección 74

El saber da poder

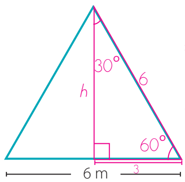
CONTENIDO

Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

El teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas ayudan a resolver problemas relacionados con triángulos acerca de los cuales se tiene poca información.

1. Trabaja en equipo. Calculen el área de cada figura.

a) Triángulo equilátero.

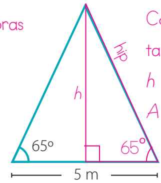


Con el teorema de Pitágoras se calcula la altura

$h = 5.196$ m

$A = 15.588$ m^2

b) Triángulo isósceles.



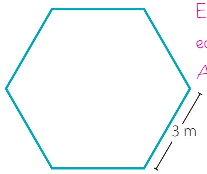
Con las razones trigonométricas:

$\tan(65°) = \frac{h}{2.5}$

$h = 2.5 \tan(65°)$

$A = 13.403$ m^2

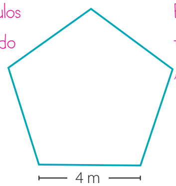
c) Hexágono regular.



Es el área de seis triángulos equiláteros de 3 m de lado

$A = 23.382$ m^2

d) Pentágono regular.



Está formado por cinco triángulos isósceles iguales

$A = 27.527$ m^2

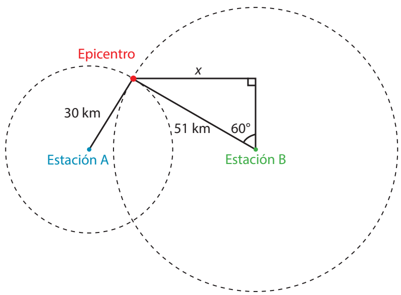
- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Mencionen cómo calcularon el área de los polígonos regulares.

2. Dos estaciones sismológicas, A y B, detectan que el epicentro de un temblor se encuentra a 30 km y 51 km de distancia, respectivamente.
Usa las razones trigonométricas del ángulo de 60° para calcular a cuántos kilómetros al oeste (x) de la estación B se encuentra el epicentro.

$x =$ 44.167 km

Explica por qué dos estaciones no bastan para conocer con exactitud la posición del epicentro.

R. T. Porque las circunferencias se cruzan en dos puntos.



Convivimos

En general, no existe un único modo para resolver problemas relativos a razones trigonométricas. Confía en tus procedimientos y en el intercambio de ideas con tu equipo; no esperes a que el profesor valide las respuestas.

En contexto

Las estaciones sismológicas detectan dos tipos de ondas (primarias y secundarias) producidas por los temblores. Como cada tipo de onda viaja a distinta velocidad, la diferencia de tiempo entre la detección de cada una sirve para calcular la distancia entre la estación y el epicentro del temblor.

3. **Efectúa, junto con dos compañeros, lo siguiente.**

a) Comparen el resultado que obtuvieron para el área del triángulo equilátero en la actividad 1. En particular, analicen cómo calcularon la altura, que debe ser menor a 6 m.

b) Hay una fórmula llamada *fórmula de Herón*, con la que se calcula el área de un triángulo, aun sin conocer la medida de la altura. Dicha fórmula se muestra a continuación.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

En ésta, A representa el área; s, el semiperímetro del triángulo; y a, b y c, las medidas de los lados. Usen esta fórmula para calcular el área del triángulo del inciso a) de la actividad 1. Verifiquen que coincida con la que obtuvieron originalmente.

c) Comparen los resultados que obtuvieron para el área del triángulo isósceles. En particular, analicen cómo obtuvieron la medida de la altura.

d) Comparen los resultados que obtuvieron para el área del hexágono regular. Expliquen, en particular, por qué ese problema es muy similar al del triángulo equilátero. R. T.

Porque el hexágono está formado por seis triángulos equiláteros.

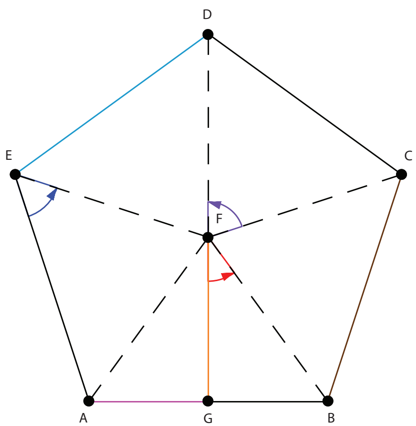
e) A continuación se muestran algunas medidas con las que se puede calcular el área del pentágono regular de la actividad 1. Escriban el valor de cada una. Después comenten cuáles usaron ustedes para obtener el área y expliquen al resto del grupo su procedimiento.

técnicas

∡ AEF = 54°

∡ CFD = 72°

∡ GFB = 36°



$\overline{DE}$ = 4 m

$\overline{FG}$ = 2.75 m

$\overline{AG}$ = 2 m

$\overline{BC}$ = 4 m

conect@mos

Descarga la actividad relacionada con razones trigonométricas en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta, en grupo y con ayuda del profesor, cómo deben ser dos ángulos agudos para que el coseno de uno valga lo mismo que el seno del otro.

Secuencia 6 / lección 75

La velocidad como razón de cambio

CONTENIDO

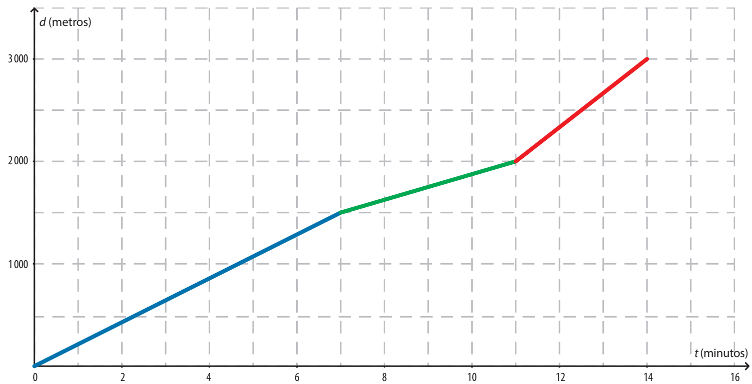
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

¿Cuánto avanza un automóvil, con velocidad constante, cada 10 min? Si un hielo se descongela, ¿cuánto aumenta su temperatura cada 15 min? En este apartado estudiarás razones de cambio entre dos magnitudes y su relación con la pendiente de la gráfica que las representa.

1. Lee la información y efectúa lo que se pide.

Para mantenerse en buena forma física, cada mañana Agustín rodea a pie un parque cercano a su casa. Ayer lo hizo a distintas velocidades: dio una vuelta caminando, dos corriendo y tres trotando (no necesariamente en ese orden).

La gráfica relaciona la distancia (*d*) recorrida por Agustín y el tiempo (*t*) transcurrido desde que comenzó a ejercitarse.



a) Escribe a qué parte del recorrido corresponde cada segmento de recta.

» Azul: Trotar » Verde: Caminar » Rojo: Correr

b) ¿Cómo se nota en la gráfica qué segmento corresponde al de mayor velocidad?

R. T. Por la inclinación de la recta (pendiente)

c) ¿Qué distancia recorrió Agustín? 3000 m

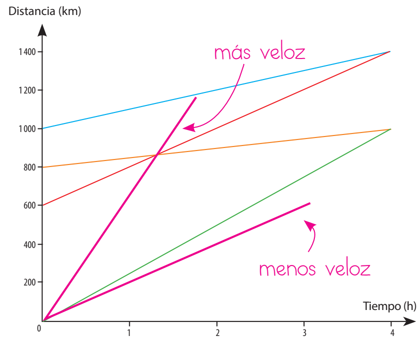
d) ¿Cuánto duró el trayecto? 14 min

e) Completa la siguiente tabla.

	Tramo azul	Tramo verde	Tramo rojo
Tiempo en que recorrió el tramo	7 min	4 min	3 min
Distancia recorrida en el tramo	1 500 m	500 min	1000 m
Velocidad promedio en el tramo	3.57 m/s	2.08 m/s	5.55 m/s

validar

f) Verifica, a partir de los datos de la tabla, tu respuesta del inciso a).



2. Cuatro trenes viajan con velocidad constante. Las rectas de la gráfica de la derecha relacionan el tiempo transcurrido y la distancia que recorre cada tren.

a) ¿De qué color es la recta del tren más rápido? verde

b) ¿Y del más lento? anaranjado

c) Traza en el mismo plano una recta que corresponda al movimiento de un tren **más rápido** que cualquiera de los anteriores.

d) Traza una recta que corresponda a un tren **menos rápido** que los anteriores.

3. Indica, en equipo, qué afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas. Luego comenten la información del recuadro inferior. Un tren A va más rápido que un tren B si…

a) la recta del tren A llega más alto que la del tren B. F

b) por cada hora, el tren A avanza más kilómetros que el B. V

c) el tren A tarda más tiempo que el B en avanzar 100 km. F

d) dado un mismo aumento en el valor de *x* (tiempo) en ambas rectas, aumenta más el valor de *y* (distancia) en la recta del tren A. V

e) dado un mismo aumento en el valor de *y* (distancia) en ambas rectas, aumenta más el valor de *x* (tiempo) en la recta del tren A. F

f) la recta del tren A es menos inclinada que la del tren B. F

Convivimos

Escribe, en tu cuaderno y con tus palabras, lo que entiendes por *rapidez*. Cuando concluyas, compara tu definición con la del recuadro de abajo. Al incorporar nuevo vocabulario, comprenderás mejor los conceptos que estés aprendiendo.

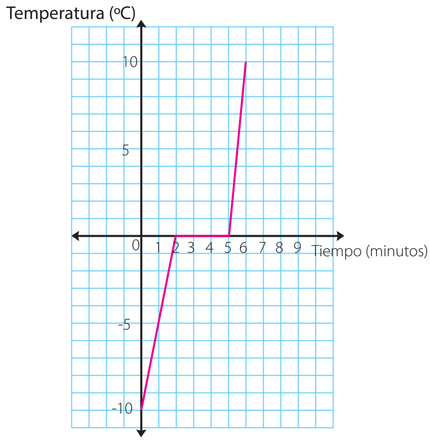
Para saber qué movimiento es más rápido, no basta comparar el tiempo transcurrido o la distancia recorrida; es necesario considerar la relación entre ambas magnitudes. Por ejemplo, 160 km en 30 min, o 320 km/h. Esta relación es una **razón de cambio** y se llama **velocidad**, o bien, **rapidez**.

Secuencia 6 / lección 76

Variaciones de temperatura

CONTENIDO Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

1. En un laboratorio se calentó un trozo de hielo durante 6 min; mientras, se medía su temperatura. El resultado de las mediciones está representado en la gráfica de la derecha.



a) Explica brevemente cómo varió la temperatura durante los 6 min. No olvides mencionar el tramo horizontal.

R. T. En los primeros 2 s, la temperatura subió 10°C; durante 3 s no cambió; y en el último segundo subió 10°C.

b) Determina las siguientes razones para saber cuánto varió la temperatura **por minuto** en cada intervalo de tiempo.

En los primeros dos minutos, la temperatura aumentó 10 grados. Entonces, la variación fue de 5 grados por minuto.

Entre los minutos 2 y 5, la temperatura aumentó 0 grados. La variación fue de 0 grados por minuto.

Entre los minutos 5 y 6, la temperatura aumentó 10 grados. La variación fue de 10 grados por minuto.

c) Observa que las razones de cambio de temperatura son diferentes.

» ¿En qué intervalo no hubo cambio de temperatura? En el segundo

» ¿En cuál el aumento de temperatura por minuto fue mayor? En el tercero

d) La ecuación que relaciona x con y en el primer intervalo es $y = 5x - 10$. ¿Cuál es la pendiente? 5 ¿Qué relación tiene esta pendiente con la razón de cambio que encontraste? Coinciden.

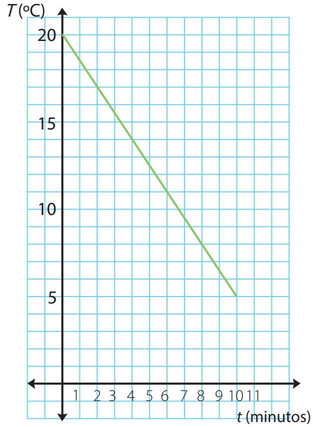
conect@mos

Conoce más acerca de la razón de cambio en

arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b01_t06_s01_descartes/index.html

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, comenta con un compañero qué dificultades encontraste durante la resolución de la actividad.

2. La temperatura del agua en un recipiente fue disminuyendo de manera constante a partir de 20 °C. Ésta se midió durante un periodo de 11 minutos y, con los resultados de las mediciones, se trazó la gráfica de la derecha.



a) ¿Qué sucede con la temperatura (T) conforme el tiempo (t) aumenta?

Disminuye.

b) Calcula las siguientes razones. Expresa la disminución de la temperatura con un signo negativo.

» Entre los minutos 0 y 4, la temperatura cambió –6 grados en 4 minutos.

» Entre los minutos 4 y 8, la temperatura cambió –6 grados en 4 minutos.

» Entre los minutos 0 y 10, la temperatura cambió –15 grados en 10 minutos.

c) Demuestra que las razones son iguales. $\frac{-6}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2}$

d) ¿Qué representan estas razones? La razón de cambio de la temperatura.

e) La ecuación que relaciona la temperatura (T) con el tiempo (t) es $T = \frac{-3}{2}t + 20$.

¿Cuál es la pendiente? $\frac{-3}{2}$

¿Qué relación tiene esta pendiente con la razón de cambio que encontraste?

Es la misma

✹ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, comenten por qué coinciden la pendiente y la razón de cambio. Después lean la siguiente información y escriban en su cuaderno las ecuaciones de dos rectas: una con razón de cambio negativa y otra cuya razón de cambio sea positiva.

Ya sabemos...

En una ecuación del tipo $y = mx + b$, m determina la inclinación de la recta, y se llama pendiente de la recta.

Una pista

Calcula cuánto cambia la temperatura cada 2 minutos.

Una pista

Calcula cuánto cambia la temperatura por minuto.

comunicar

Cuando la **razón de cambio** entre dos cantidades es **constante**, la gráfica de la relación es una **línea recta**. La **razón de cambio** de una recta es su **pendiente**.

Cuando una cantidad aumenta, la otra también lo hace; la **razón de cambio es positiva**. Por ejemplo, en el caso del cubo de hielo, mientras el tiempo aumentaba, la temperatura también lo hacía.

En el ejemplo de disminución de temperatura, mientras *t* aumentaba, *T* disminuía. En ese caso, la **razón de cambio** de la recta es **negativa**.

BLOQUE 4

Secuencia 6 / lección 77

La pendiente como razón de cambio

CONTENIDO Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

resolver

Una pista

Dado un punto en ciertas coordenadas (*x*, *y*), imagina que al desplazarte *x* unidades sobre el eje horizontal, subes *y* unidades sobre el vertical. ¿En qué caso la pendiente es mayor, cuando te desplazas 1 para subir 2 o cuando te desplazas 1 para subir 3?

1. En cada renglón de la siguiente tabla, se muestran las coordenadas de dos puntos pertenecientes a una recta. Sin trazarlas, anota cuál de las dos rectas agrupadas en cada inciso tiene mayor pendiente.

a)

Recta	Pasa por	¿Qué recta tiene la pendiente mayor?	¿Cómo lo sabes?
m	(0, 0) y (1, 2)	n	R. P.
n	(0, 0) y (1, 3)		

b)

Recta	Pasa por	¿Qué recta tiene la pendiente mayor?	¿Cómo lo sabes?
p	(3, 5) y (4, 7)	Son iguales	R. P.
q	(2, 9) y (6, 17)		

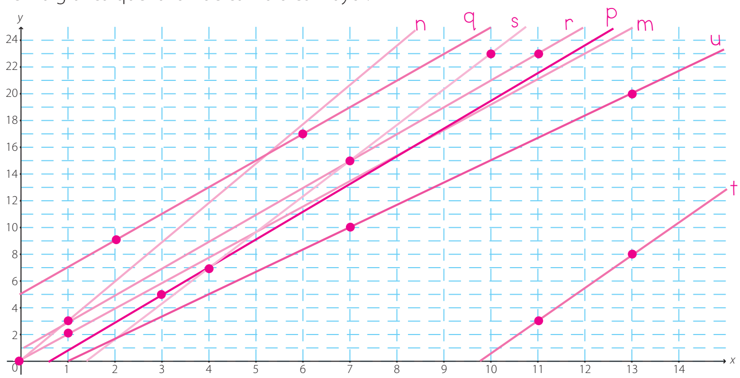
c)

Recta	Pasa por	¿Qué recta tiene la pendiente mayor?	¿Cómo lo sabes?
r	(7, 15) y (11, 23)	s	R. P.
s	(7, 15) y (10, 23)		

d)

Recta	Pasa por	¿Qué recta tiene la pendiente mayor?	¿Cómo lo sabes?
t	(11, 3) y (13, 8)	t	R. P.
u	(7, 10) y (13, 20)		

e) Traza las rectas en el plano cartesiano. Después explica en tu cuaderno cómo se nota en la gráfica qué razón de cambio es mayor.



sm

- Comenta, con el grupo, tus respuestas y argumentos. Después lean la siguiente información y expliquen cómo se puede saber, a partir de las coordenadas de los puntos, qué recta de la actividad 1 tiene mayor pendiente.

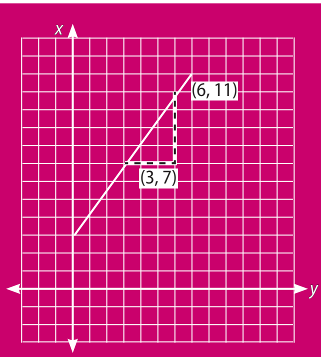
La pendiente de una recta también es la razón de cambio de las ordenadas respecto a las abscisas. Así como la pendiente de una recta es constante, su razón de cambio también. Para calcularla se eligen dos puntos cualesquiera de la recta; por ejemplo, (6, 11) y (3, 7).

Por cada vez que x aumenta 3, y lo hace 4. En otras palabras, cuando x aumenta 1, y lo hace $\frac{4}{3}$.
El cálculo también se puede hacer así:

razón de cambio $= \frac{\text{cambio de } y}{\text{cambio de } x}$;

razón de cambio $= \frac{(11-7)}{(6-3)}$;

razón de cambio $= \frac{4}{3}$.



2. En cada tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos pertenecientes a una recta. Anota, en cada caso, el valor de su razón de cambio (pendiente).

Recta 1	
x	y
0	5
1	7
2	9
3	11
Razón de cambio:	2

Recta 2	
x	y
0	2.5
0.5	3
1	3.5
1.5	4
Razón de cambio:	1

Recta 3	
x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3}{2}$	6
$\frac{5}{2}$	10
Razón de cambio:	4

Recta 4	
x	y
7	50
8	40
9	30
10	20
Razón de cambio:	–10

Recta 5	
x	y
0	0
1	6
5	30
7	42
Razón de cambio:	6

Recta 6	
x	y
0	8
2	2
4	–4
10	–22
Razón de cambio:	–3

conect@mos

Descarga la actividad de razón de cambio en

www.conectadigital-sm com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta con tus compañeros el significado de la razón de cambio en la situación que propusiste.

comunicar

- Comenta, con el resto del grupo, las respuestas de los problemas anteriores. Expliquen por qué, a diferencia de la actividad 1, en el problema anterior la recta con mayor pendiente no es la que más se acerca al eje vertical.

3. Escribe en tu cuaderno un problema que se resuelva usando la razón de cambio de una recta. Planteáselo a un compañero y resuelve el de él.

BLOQUE 4

Secuencia 7 / lección 78

El mejor horno

CONTENIDO Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Hay situaciones donde lo que interesa de un conjunto de datos es conocer su dispersión (qué tan separados o juntos están entre sí). En esta secuencia aprenderás que la desviación media es un recurso útil para el análisis de la dispersión de un conjunto de datos.

resolver

1. Para comparar la precisión de horneado de dos hornos de gran tamaño, se puso el termostato de cada uno a 180 °C y se tomó la temperatura (en °C) en distintos puntos.

Horno A				
160	200	192	190	188
162	180	165	196	182
198	170	194	170	160
187	166	186	184	164

Horno B				
194	204	185	200	188
190	198	187	189	192
193	193	194	170	194
175	181	187	192	184

a) La temperatura de 180 °C es la indicada en el manual como la idónea para el horneado de panqués.

¿Consideras que ambos hornos son igual de adecuados para hornear panqués?

No ¿Por qué? R. P.

b) Trabaja en equipo. Comenten cómo conviene analizar los datos para tomar una decisión. Distribuyan el trabajo según convengan y anoten sus conclusiones.

¿Qué horno es mejor para hornear panqués? R. P.

¿Por qué? R. P.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Lleguen a una decisión común y anoten sus comentarios.

R. P.

2. **Doña Carmen —experta repostera que hornea panqués en grandes cantidades y que asegura no saber matemáticas—, su marido y su hijo —estudiante de ingeniería— discuten acerca de qué horno deben seleccionar para hornear panqués.**

Marido: Las temperaturas del horno A varían de 160 °C a 200 °C y las del B, de 170 °C a 204 °C. Es mejor el horno B porque hay menos variación de temperatura.

Doña Carmen: En el horno A, mientras unos panqués quedan crudos, otros se queman, y sólo algunos salen bien cocidos. En el B, los panqués se queman, pero si la temperatura se reduce un poco, quedan mejor que en el A.

Hijo: El promedio de temperaturas en el horno A es 179.7 °C y en el B, 189.5 °C. El promedio más cercano a 180 °C es el del A; por eso es mejor.

Argumenta, en equipo, con quién estás de acuerdo. Expliquen su respuesta. ______

R. P. ______

Una manera de saber qué variación hay en las temperaturas es considerar el **rango**, es decir, la diferencia entre los valores máximo y mínimo del conjunto de datos. Saber que en el horno A el rango de temperaturas es de 40 °C, es un primer indicador de que, a pesar de que el promedio es cercano a 180 °C, la temperatura del horno es muy irregular.
En la siguiente lección aprenderás otra manera de considerar la variación de temperatura.

3. **Escribe, para cada afirmación, una V si consideras que es verdadera, y explica en tu cuaderno por qué lo es; o una F si supones que es falsa. En este último caso, justifica tu respuesta con un ejemplo en que no se cumpla la afirmación.**

a) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus promedios son iguales. F

b) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus valores máximo y mínimo coinciden. F

c) Si dos conjuntos tienen rangos y promedios iguales, entonces los conjuntos son idénticos. F

Secuencia 7 / lección 79

Desviación media

CONTENIDO Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

1. Una manera de analizar los datos de temperatura obtenidos de los hornos A y B de la lección anterior es calcular la desviación media de cada caso y compararlas. La del horno B se obtiene de la siguiente manera.

- Se calcula la media aritmética del conjunto de datos.
- Se calcula la diferencia entre cada dato y la media aritmética (se considera el número sin signo, pues sólo interesa saber su diferencia con la media aritmética, es decir, la desviación del dato respecto a la media).
- Se calcula la media aritmética de esas diferencias, la cual es la desviación media.

Dato	Diferencia respecto a 189.5
194	4.5
190	0.5
193	3.5
175	14.5
204	14.5
198	8.5
193	3.5
181	8.5
185	4.5
187	2.5
194	4.5
187	2.5
200	10.5
189	0.5
170	19.5
192	2.5
188	1.5
192	2.5
194	4.5
184	5.5
189.5 (media aritmética)	5.95 (desviación media)

Ya sabemos...

La media aritmética de un conjunto de datos es su promedio. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado entre el número de ellos.

2. Calcula y escribe los datos que faltan para determinar la desviación media del horno A.

Dato	160	162	198	187	200	180	170	166	192	165	194	186
Diferencia respecto a 179.7	19.7	17.7	18.3	7.3	20.3	0.3	9.7	13.7	12.3	14.7	14.3	6.3

Dato	190	196	170	184	188	182	160	164	Media aritmética	179.7
Diferencia respecto a 179.7	10.3	16.3	9.7	4.3	8.3	2.3	19.7	15.7	Desviación media	12.06

3. ¿De qué manera estos nuevos datos (la desviación media de cada horno) ayudan a explicar la elección de doña Carmen y sus observaciones? ______________________

R. P. ______________________

✷ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Lleguen a una decisión común.

4. Califica cada afirmación como verdadera o falsa. Argumenta tu respuesta.
La desviación media del horno **A** es mayor que la que del **B** porque…

a) hay más medidas de temperatura en el **A**. Falsa

b) las medidas del **A** están más alejadas unas de otras, es decir, más dispersas. Verdadera

c) la temperatura del **A** es menos estable, es decir, cambia más durante cierto lapso de tiempo. Falsa

✷ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Mencionen cómo calcularon la desviación media del horno A y comenten sus argumentos de la actividad 3.

En segundo grado estudiaste casos en los que las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), al ser valores representativos de un conjunto, no siempre aportaban suficiente información, pues no indicaban la dispersión de los datos.

La **desviación media** informa sobre el grado de dispersión de un conjunto de datos respecto a su media aritmética.

En el ejemplo de las lecciones anteriores, para que un horno sea eficiente es importante que mantenga una temperatura uniforme y, por tanto, que los datos presenten un grado pequeño de dispersión.

El horno A tiene rango de 40 y desviación media de 12.06, mientras que el B, rango de 34 y desviación media de 5.95. Las temperaturas son más uniformes en el horno B; por eso es más eficiente.

Secuencia 7 / lección 80

Anestesia y otros problemas

CONTENIDO

Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

1. **Lee la información y haz lo que se pide.**

Para investigar la efectividad de dos anestesias, se administró cada una a 16 personas. En todos los casos se registró la duración del efecto. La duración promedio de la anestesia A fue de 23 min y la desviación media, 5.75 min; la duración promedio de la B fue de 25 min y la desviación media, 13.5 min.

a) Califica cada oración como **verdadera** o **falsa**. Argumenta tus respuestas en tu cuaderno.

La desviación media del conjunto de datos permite asegurar que…

» a todas las personas, el efecto de la anestesia A les duró entre 23 min – 5.75 min y 23 min + 5.75 min. Falsa

» aunque es necesario probarla con más personas, la anestesia A parece ser más adecuada que la B. Verdadera

» a casi todas las personas, el efecto de la anestesia A les duró entre 17 min y 29 min.

Falsa

validar

b) En la siguiente tabla se muestra la duración de la anestesia A en las 16 personas. Revisa si esta información contradice tus respuestas del inciso anterior.

Duración del efecto (min)							
19	25	22	31	17	17	20	27
23	19	32	14	34	35	22	11

c) Explica en tu cuaderno por qué, aunque se conozca el promedio y la desviación media de un conjunto de datos, no es posible deducir su rango.

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después redacten, de manera grupal, una explicación común para el inciso c).**

resolver

2. **Lee la siguiente información y responde.**

Durante un año, cuatro personas recibieron ingresos de la siguiente manera.

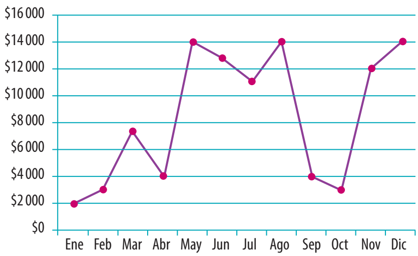
» Gisela es vendedora; además de un sueldo base mensual, recibió comisiones dependiendo del número de ventas que hizo, por lo que su ingreso mensual fue variable.

» Tomás es editor; percibió una cantidad fija de dinero cada mes.
» Paola es abogada; recibió un sueldo fijo mensual en una empresa, pero después de medio año la promovieron, por lo que su salario aumentó considerablemente.
» Nicolás es estudiante; recibió una cantidad fija de dinero al mes por ser ayudante de profesor, además de un único pago en diciembre por un proyecto escolar.

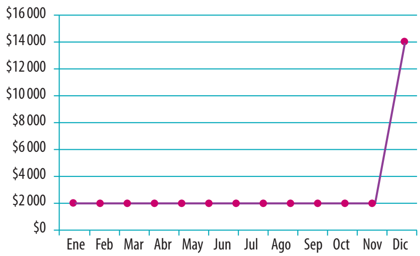
a) ¿En qué casos la desviación media del ingreso mensual coincide con la desviación de cada mes? Tomás

b) ¿En qué casos la desviación media y el rango son 0? Tomás

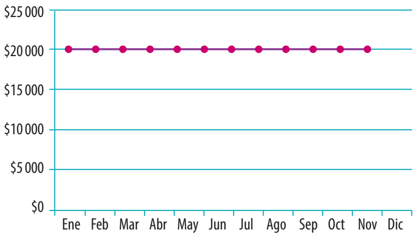
c) Las siguientes gráficas muestran las variaciones en el salario mensual de cada persona. Escribe, junto a cada una, el nombre de la persona correspondiente. Luego revisa tu respuesta del inciso anterior.



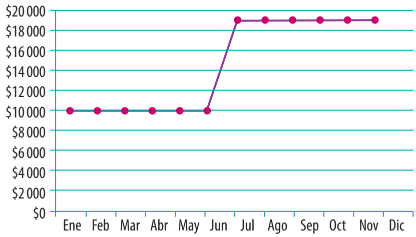
Gisela



Nicolás



Tomás



Paola

* Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Identifiquen, de preferencia sin hacer cálculos, qué salarios de la actividad anterior tienen el mismo rango, pero distinta desviación media; y cuáles tienen la misma desviación media, pero distinto rango.

Como comprobaste en las dos lecciones anteriores, el rango y la desviación media ayudan a analizar qué tan dispersos están los datos. No obstante, tienen algunas diferencias. Por ejemplo, en el problema anterior hay dos conjuntos con el mismo rango pero distinta desviación media, y dos con la misma desviación media pero distinto rango.
El rango nos muestra dónde están ubicados los datos, mientras que la desviación media, qué tan separados están del promedio. Estas diferencias son importantes para decidir cuál conviene usar en cada problema.

conect@mos

Descarga la actividad relativa a la medición de la dispersión en

wwww.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

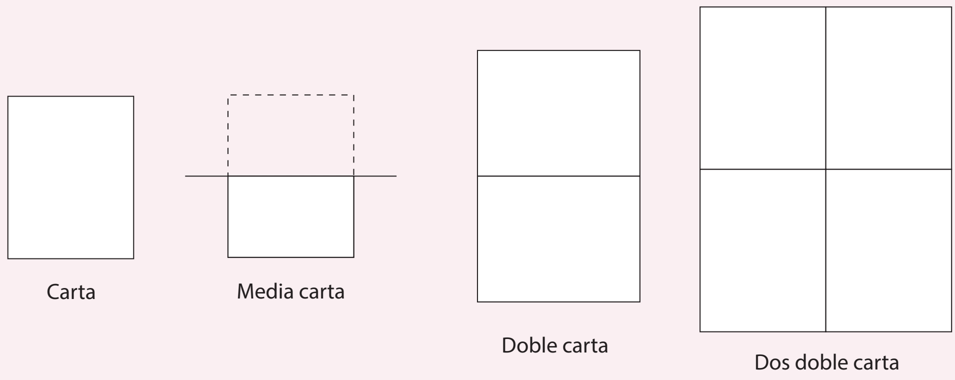
Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Redacten, de manera grupal, fórmulas para encontrar, con una hoja de cálculo, el promedio, el rango y la desviación media de un conjunto de datos.

Una hoja de papel

Mide los lados de una hoja tamaño carta. ¿Cuáles son sus dimensiones?

27.9 cm × 21.6 cm

Calcula las medidas de los otros tres rectángulos que se muestran abajo.



• Media carta (la mitad de una hoja carta partida por su lado largo).

21.6 cm × 13.95 cm

• Doble carta (dos hojas carta pegadas por su lado más largo).

27.9 cm × 43.2 cm

• Dos doble carta (dos hojas doble carta pegadas por su lado más largo).

55.8 cm × 43.2 cm

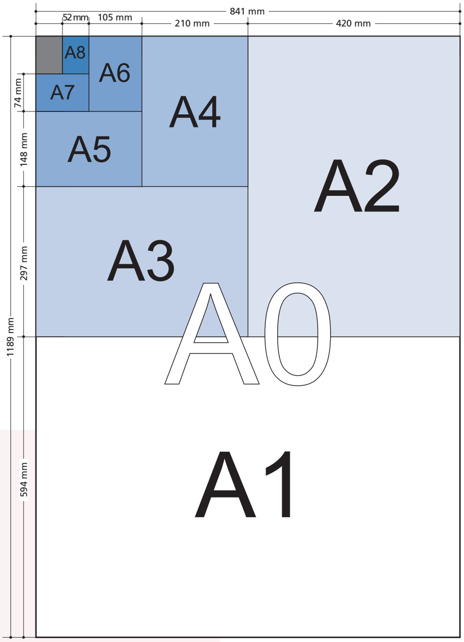
¿Cuáles de los cuatro rectángulos son semejantes? Explica en tu cuaderno por qué.

Argumenta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

• Siempre que cortamos un rectángulo a la mitad, por su lado más largo, se obtienen dos rectángulos semejantes al original. Falsa

• Al juntar cuatro rectángulos iguales podemos obtener un rectángulo semejante a esos rectángulos por separado. Verdadera

Hay rectángulos mediante los cuales, al cortarlos a la mitad (por su lado más largo), se obtienen dos rectángulos semejantes al original. ¿Puedes dibujar un rectángulo así? ¿Cuáles deben ser sus dimensiones? (Una pista: si tienes un rectángulo cuyo lado menor mide 10 cm y cuyo lado mayor, x cm, ¿cuánto debe valer x para que, al cortar el rectángulo, se obtenga otro semejante?).



En la mayoría de los países no se utiliza el papel tamaño carta, sino un formato de papel estándar llamado serie A. El tamaño A0 es un pliego de papel de 1 m^2 de superficie, del cual, al cortarlo por la mitad, se obtienen dos rectángulos semejantes al original. El tamaño A1 se obtiene al cortar el A0 a la mitad, por su lado más largo. El A2, a partir del A1, y así sucesivamente.

- Elabora una tabla en la que anotes las dimensiones de todos los tamaños de papel, desde A0 hasta A8; verifica que todos sean rectángulos semejantes (aproximadamente, porque las dimensiones están redondeadas).

- ¿Cuál es el tamaño más parecido al tamaño carta?
  A4
- Si tienes un dibujo en tamaño carta y quieres ampliarlo a tamaño doble carta, ¿cómo debe ser la ampliación para que el dibujo quede exactamente igual?

  R. P.

- Si tienes un dibujo en tamaño A3 y deseas ampliarlo a tamaño A1, ¿qué porcentaje deben tener las longitudes del dibujo ampliado respecto al dibujo original?

  El doble (200% del tamaño original)

- Si tienes un dibujo en tamaño A3 y quieres reducirlo a tamaño A4, ¿qué porcentaje deben tener las longitudes del dibujo reducido respecto al dibujo original?

  70% del tamaño original

El formato carta sólo se sigue utilizando en México, Estados Unidos de América, Canadá, Colombia y Filipinas. Se espera que en los próximos años se haga la transición a la serie A en estos países, pues con ese formato no se desperdicia papel al hacer ampliaciones o reducciones en distintos tamaños; además, es más conveniente que en el mundo entero se utilice un tamaño de papel estandarizado.

Subraya la opción correcta.

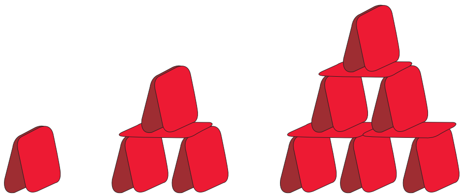
1. ¿Qué expresión sirve para calcular el número de cartas de la figura n en la sucesión?

a) $2n^2 + n$

b) $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

c) $2n^2 - n + 1$

d) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$



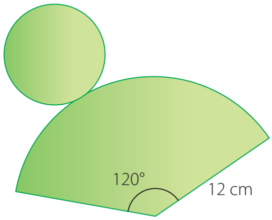
2. La siguiente figura representa el desarrollo plano de un cono. ¿Cuánto mide el radio del círculo pequeño?

a) 2 cm

b) 3 cm

c) 4 cm

d) 5 cm



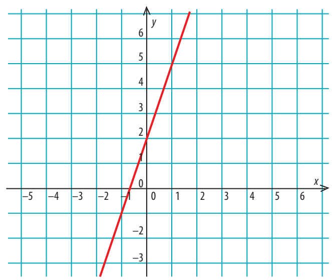
3. ¿Qué pendiente tiene la recta roja?

a) –1

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

d) 3



4. En el triángulo **KLM** se indica la medida de dos ángulos y un lado. ¿Cuánto mide el lado **KM**?

a) 3.5 u

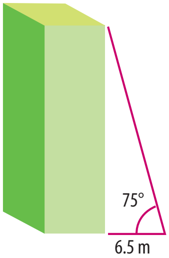
b) 6 u

c) 7 u

d) 10.5 u



5. ¿Qué expresión permite calcular la altura (h) del edificio?



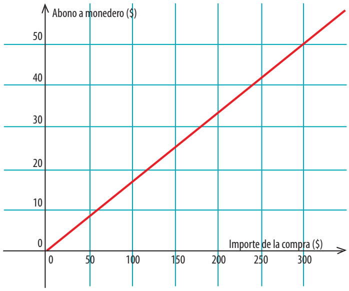
a) $h = (\text{sen } 75°)(6.5)$

b) $h = \frac{(6.5)}{(\tan 75°)}$

c) $h = \frac{(\text{sen } 75°)}{(6.5)}$

d) $h = (\tan 75°)(6.5)$

6. En la gráfica de la derecha se representa la cantidad de dinero que abona una tienda a sus clientes, dependiendo del importe de compra. ¿Qué parte de la compra se abona al monedero del cliente?



a) \$10.00 por cada \$50.00 de compra.

b) La mitad de la compra.

c) 20% de la compra.

d) $\frac{1}{6}$ de la compra.

7. En la siguiente tabla se muestran los resultados de una prueba de lectura efectuada a algunos alumnos de la escuela secundaria Ignacio Manuel Altamirano, en Zacatecas.

	María	Ximena	Salvador	Rodrigo	Patricia	Pedro
Palabras leídas por minuto	151	163	173	158	181	149

¿Qué alumno se alejó más del promedio y cuál fue su desviación?

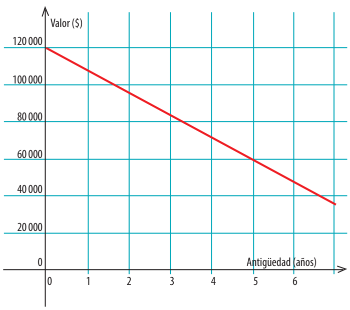
a) Pedro, con una desviación de 13.5.

b) Pedro, con una desviación de 30.

c) Patricia, con una desviación de 17.5.

d) Patricia, con una desviación de 18.5.

8. En la gráfica de la derecha se muestra cómo ha cambiado el valor de un coche a partir de su compra. ¿Qué porcentaje del valor original ha perdido cada año?



a) 5%

b) 10%

c) 12%

d) 20%

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Atínale al peso

En la feria del pueblo, Jacinto y sus amigos encontraron un concurso peculiar: cada concursante estimaba con la pura vista el peso de la persona que atendía el puesto, y ganaba si acertaba al peso exacto o si erraba por 1 kg o menos (el margen de error era de 1 kg). Si el concursante no ganaba, sólo se le comunicaba que su estimación había rebasado el peso exacto o ésta no era suficiente.

Jacinto y sus amigos hicieron las siguientes estimaciones.

Persona	Jacinto	Gema	Claudio	Alejandro
Peso que estimó	85 kg	80 kg	84 kg	81 kg
Resultado	Se pasó.	Le faltó.	Se pasó.	Le faltó.

Pregunta 1. ¿Quiénes estuvieron más cerca de ganar?

Claudio y Alejandro

Pregunta 2. ¿En qué rango está el peso de la persona que atendía el puesto?

Entre 82 kg y 83 kg

Pregunta 3. ¿Con qué margen de error hubieran podido ganar quienes estuvieron más cerca de estimar el peso exacto?

R. T. 1.5 kg

Pregunta 4. Al ser el último en jugar, Alejandro tenía información suficiente para ganar. Explica por qué.

R. T. De acuerdo a las estimaciones de Gema y Claudio, el peso debe ser mayor que 81 kg pero menor que 83 kg; Alejandro ganaba si hubiera dicho 82 kg.

Pregunta 5. Inventa un peso que cumpla con las condiciones del problema y calcula la desviación en la estimación de cada participante.

R. P.

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

Ángulos para orientarse y medir





Los marineros utilizan el sextante para calcular el rumbo de sus naves. Este aparato emplea la medición de ángulos para conocer la posición de algún astro, lo que, combinado con la hora del día, permite calcular la latitud en tierra del observador. El sextante puede determinar ángulos comprendidos entre 0° y 60°.



Los topógrafos e ingenieros utilizan, a su vez, el teodolito, un instrumento que permite medir a la vez ángulos horizontales y verticales para calcular distancias inaccesibles.

Actualmente disponemos de instrumentos de navegación más avanzados, como el GPS, que indica nuestra posición con bastante exactitud gracias al sistema de satélites en que se apoya.

Pregunta 1. ¿Por qué el sextante recibe ese nombre?

R. T. Porque abarca ángulos de 60 grados, es decir, la sexta parte de una vuelta completa.

Pregunta 2. Un topógrafo se coloca a 40 m de distancia de un edificio y advierte que el ángulo de inclinación de su línea de visión a la punta del edificio es de 35°. ¿Cual es la altura de dicho edificio?

$\tan 35° = \frac{h}{40}$;
$h = (40)\tan 35°$
$h = 28$ m

Pregunta 3. Investiga qué significan las siglas GPS y cuántos satélites necesita un GPS para localizar un punto. Explica por qué.

R. T. Global Positioning System. Se requieren tres satélites para ubicar un punto (la intersección de tres esferas).

Pregunta 4. En la mayoría de los barcos modernos se utilizan GPS para navegar; sin embargo, en estos aún se cuenta con un sextante, que puede utilizarse en caso de ser necesario. ¿En qué casos resultaría útil el sextante en lugar del GPS?

R. T. Cuando falle la conexión a los satélites.

Autovaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.				
Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.				
Elaboro desarrollos planos de conos y cilindros rectos.				
Analizo las relaciones existentes entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa, y el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.				
Analizo las relaciones existentes entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo.				
Utilizo las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, para resolver problemas.				
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Identifico la pendiente de la recta que representa un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Mido la dispersión de un conjunto de datos e identifico las diferencias entre la "desviación media" y el "rango".				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

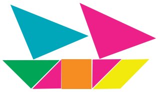
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

El tangram

El tangram es un rompecabezas chino de siete piezas: cinco triángulos rectángulos isósceles, un cuadrado y un paralelogramo.

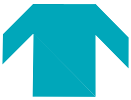


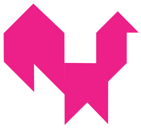
Con las siete piezas es posible armar figuras sencillas, como las que se muestran a continuación.





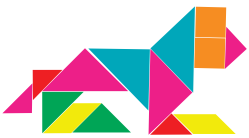
Elabora un tangram. Traza en cartulina, cartoncillo duro o *foamy*, un cuadrado de 15 cm de lado y, dentro de él, traza las siete piezas y recórtalas. Usa tu tangram para formar las siguientes figuras.

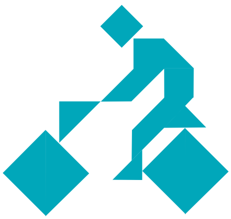






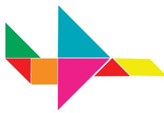
Hay figuras más complicadas de formar, como el león, que se arma con dos tangrams (14 piezas). Forma al ciclista y el microscopio.







Emplea las figuras anteriores, u otras que tú inventes, para continuar el siguiente cuento.

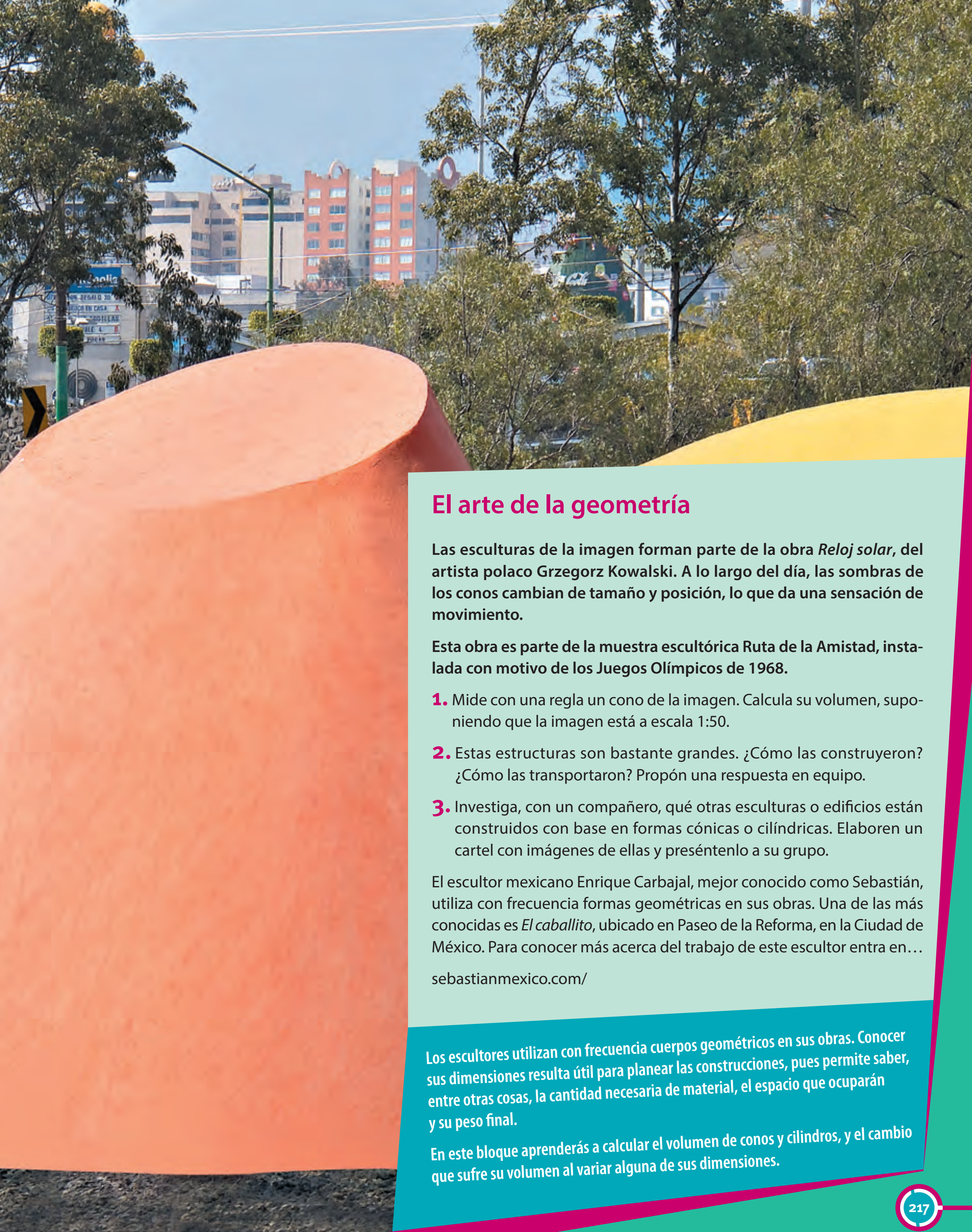
Desde pequeño, Sebastián disfrutaba mirar al cielo en busca de  y de . Él decía que, cuando fuera grande, construiría un gran…



BLOQUE 5

Aprendizajes esperados

- ✓ Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- ✓ Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- ✓ Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



El arte de la geometría

Las esculturas de la imagen forman parte de la obra *Reloj solar*, del artista polaco Grzegorz Kowalski. A lo largo del día, las sombras de los conos cambian de tamaño y posición, lo que da una sensación de movimiento.

Esta obra es parte de la muestra escultórica Ruta de la Amistad, instalada con motivo de los Juegos Olímpicos de 1968.

1. Mide con una regla un cono de la imagen. Calcula su volumen, suponiendo que la imagen está a escala 1:50.
2. Estas estructuras son bastante grandes. ¿Cómo las construyeron? ¿Cómo las transportaron? Propón una respuesta en equipo.
3. Investiga, con un compañero, qué otras esculturas o edificios están construidos con base en formas cónicas o cilíndricas. Elaboren un cartel con imágenes de ellas y preséntenlo a su grupo.

El escultor mexicano Enrique Carbajal, mejor conocido como Sebastián, utiliza con frecuencia formas geométricas en sus obras. Una de las más conocidas es *El caballito*, ubicado en Paseo de la Reforma, en la Ciudad de México. Para conocer más acerca del trabajo de este escultor entra en…

sebastianmexico.com/

Los escultores utilizan con frecuencia cuerpos geométricos en sus obras. Conocer sus dimensiones resulta útil para planear las construcciones, pues permite saber, entre otras cosas, la cantidad necesaria de material, el espacio que ocuparán y su peso final.

En este bloque aprenderás a calcular el volumen de conos y cilindros, y el cambio que sufre su volumen al variar alguna de sus dimensiones.

BLOQUE 5

Secuencia 1 / lección 81

La traducción de los problemas

CONTENIDO Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada

Ya has estudiado ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales. ¿Cuándo se usan unas y cuándo, otras? Para saberlo, hay que interpretar el problema y luego resolver la ecuación que resulte. A eso se referirá esta secuencia de lecciones.

1. Considera lo siguiente: Pedro tiene x años de edad. Escribe, con base en la edad de Pedro, la expresión algebraica correspondiente a cada enunciado.
   a) Julián tiene tres veces la edad de Pedro. ¿Cuál es la edad de Julián? $3x$
   b) Luisa tiene cinco años menos que Julián. ¿Cuál es la edad de Luisa? $3x - 5$
   c) Ricardo tiene cuatro años menos que Pedro. ¿Cuál será la edad de Ricardo en siete años? $x - 4 + 7 = x + 3$

2. En una granja hay gallinas, cerdos, conejos y caballos. Escribe la expresión algebraica correspondiente a cada enunciado. Considera n como el número de gallinas.
   a) En la granja hay el mismo número de conejos que de gallinas. ¿Cuántos conejos hay en la granja? n (igual que las gallinas)
   b) El número de cerdos es el doble que el de gallinas. ¿Cuántos cerdos hay? $2n$
   c) En la granja hay cinco caballos más que el número de gallinas. ¿Cuántos caballos hay? $n + 5$ (cinco más que las gallinas)
   d) ¿Cuántos animales hay en la granja? $5n + 5$ animales
   e) Con base en lo anterior, ¿es posible que el total de animales sea 50? Sí Explica por qué. R. T. Porque $5n + 5 = 50$ sí tiene solución entera: $n = 9$

3. Manuel tiene x pesos, y Pilar, y pesos. Formula, en equipo, la ecuación que corresponda a cada enunciado.
   a) Manuel y Pilar tienen en total $1 500.00. $x + y = 1\,500$
   b) Manuel tiene tres veces la cantidad de dinero que tiene Pilar. $x = 3y$
   c) Si Manuel gastara $375.00, tendría el doble de lo que tiene Pilar. $x - 375 = 2y$
   d) Si Manuel regalara $375.00 a Pilar, ambos tendrían lo mismo. $x - 375 = y + 375$
   e) ¿Cuánto dinero tiene cada uno? $x = 1\,125$, $y = 375$

conect@mos

Resuelve más problemas con ecuaciones en

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/B1_78_UNAM/index.htm

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, comenta con un compañero qué dificultades encontraste al resolver la actividad.

* Compara, con ayuda del profesor, tus expresiones algebraicas con las de tus compañeros. Verifiquen que sean equivalentes; en caso contrario, corrijan lo necesario.

4. Trabaja en equipo. Formulen la ecuación con la que se pueda resolver cada problema y escriban la solución.

resolver

a) Dos familias compraron boletos para el cine. La familia Pérez compró uno para adulto y cuatro para niño, y pagó \$190.00; la familia Sánchez compró dos para adulto y dos para niño, y pagó \$170.00 ¿Cuánto cuesta un boleto para niño?

$x + 4y = 190$
$2x + 2y = 170$

$y = 35$
$x = 50$

b) En otro cine, por un boleto para adulto y uno para niño se paga \$90.00. El boleto para adulto cuesta tres y media veces lo que el boleto para niño. ¿Cuánto cuesta cada boleto?

$x + y = 90$
$3.5y = x$

Adulto: \$70
Niño: \$20

c) Pienso un número; le sumo 2.5 y multiplico el resultado por 5; obtengo 20.5. ¿Qué número es el que pensé?

x es el número que pienso
$(x + 2.5)5 = 20.5$

$x = 1.6$

d) El pro<ducto de dos números consecutivos es 702. ¿De qué números se trata?

$x\,(x + 1) = 702$

$x^2 + x = 702$

los números son 26 y 27

e) El producto de dos números es 999; su diferencia, 10. ¿Qué números son?

$xy = 999$
$x - y = 10$

$(10 + y)\,y = 999$
$10y + y^2 - 999 = 0$

los números son 27 y 37

Ya sabemos...

Cuando decimos *producto* hablamos de multiplicación. Cuando decimos *diferencia* nos referimos a la resta.

* Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.
  a) Analicen las ecuaciones formuladas para cada problema. Si hay errores, corríjanlos.
  b) Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si no coinciden, averigüen a qué se debe y corrijan lo necesario.

Secuencia 1 / lección 82

De todo un poco

CONTENIDO

Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada

1. Trabaja en equipo. Elijan la ecuación que resuelva el problema y escriban la solución.

Por cada operación que Irma hace bien, gana dos puntos; por cada operación que hace mal, pierde uno. Si ella hizo 18 operaciones y obtuvo 15 puntos, ¿cuántas operaciones hizo bien? Hizo 11 operaciones bien. $x = 11$

$2x + (18 - x) = 15$ $\quad$ $\underline{2x - (18 - x) = 15}$ $\quad$ $2x + (18 + x) = 15$

2. Respondan con base en la sucesión de figuras que se muestra a continuación. Consideren que la sucesión continúa de la misma forma.

Ya sabemos...

La expresión que se busca es la regla general de la sucesión.

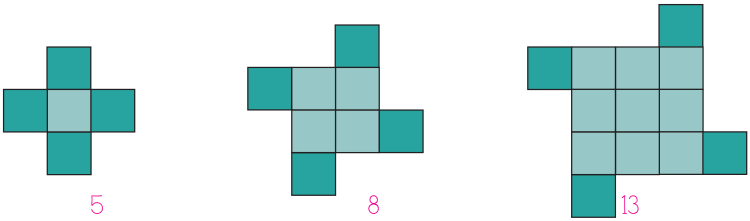


Figura 1 $\quad$ Figura 2 $\quad$ Figura 3

Una pista

Puedes formular una ecuación igualando la expresión algebraica a 175 y averiguar si tiene solución entera.

a) ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 12? 148

b) ¿Qué expresión algebraica corresponde al número de cuadrados de la figura *n*? $n^2 + 4$

c) ¿Habrá en la sucesión una figura formada por 175 cuadros? no ¿Cómo lo saben?

R. T. $n^2 + 4 = 175$ no tiene solución entera.

d) Encuentra una cantidad de cuadrados mayor que 100 y que corresponda a la sucesión.

R. T. 104, 125, 148, 173, etcétera.

* Compara los resultados de las actividades anteriores con los de tus compañeros y corrijan lo necesario.

3. Encuentra, en equipo, un par de números que satisfaga la ecuación $7x - 2y = 38$, de manera que una de las incógnitas sea el triple de la otra.

$x =$ 6 $\qquad$ $y =$ 2

» ¿Hay más de una solución? no Expliquen su respuesta. R. T. Se tiene un sistema de dos ecuaciones, $7x - 2y = 38$, $y = \frac{1}{3}x$, que tiene solo una solución.

4. El largo de un rectángulo es 4 cm mayor que el ancho, y su área es 96 cm². ¿Cuánto mide el perímetro?

resolver

x



$P = 2x + 2\ (x + 4)$

$A = x(x + 4) = 96$ cm

$x^2 + 4x - 96 = 0$

$a = 1$

$b = 4$

$c = -96$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-96)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{-4 \pm 20}{2}$$

$x_1 = -12 \quad x_2 = 8$

se toma x positiva entonces $P = 2(8) + 2(8 + 4) = 40$

5. Trabaja en equipo. Inventen un problema que se resuelva con un sistema de ecuaciones y resuélvanlo.

comunicar

R. P.

Convivimos

Para inventar un problema se requiere analizar qué datos se proporcionarán, la pregunta que se planteará, si el problema tendrá solución, y algunos métodos para llegar a ella. Comenta con un compañero lo que aprendiste en esta actividad.

6. Trabaja en equipo. Inventen un problema que se resuelva con una ecuación de segundo grado y resuélvanlo.

R. P.

- Intercambien, con otro equipo, los problemas que inventaron. Verifiquen, con ayuda del profesor, que estén bien planteados y que la solución sea correcta.

7. Elige, en equipo, la ecuación que resuelva el siguiente problema y escriban la solución.

Después de comer en un restaurante, ocho personas dividieron la cuenta que debían pagar, que era de $1 300.00, pero tres pagaron $50.00 menos que los demás. ¿Cuánto pagó cada una de las personas que gastó más?

» $8x + 50x = 1\,300$

» $8x - 50x = 1\,300$

» $3x + 5x = 1\,300$

» $3(x - 50) + 5x = 1\,300$

$3x - 150 + 5x = 1300$

$8x = 1300 + 150 = 1450$

$x = \frac{1450}{8} = 181.25$

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten cómo identificaron la ecuación que resuelve el problema anterior.

En contexto

Resuelve los acertijos y problemas que se presentan en *Matemáticas recreativas*, de la Biblioteca de Aula.

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, México, SEP-Martínez Roca, serie Espejo de Urania, 2003.

BLOQUE 5

Secuencia 2 / lección 83

El volumen del cilindro

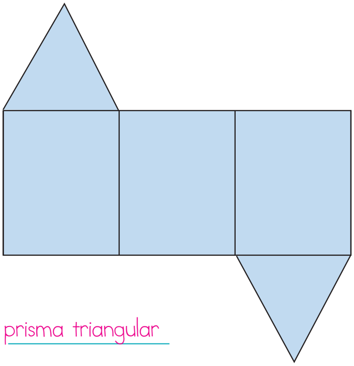
CONTENIDO

Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

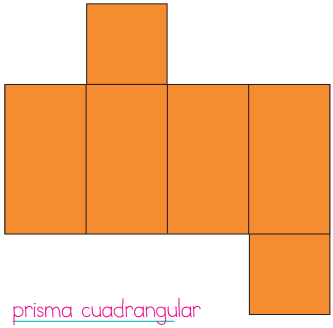
El cilindro y el cono son cuerpos geométricos que se suelen usar en objetos cotidianos. Hay, por ejemplo, latas para envasar alimentos, cubetas de pintura, vasos para tomar agua y barquillos para helado. ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro? ¿Y el de un cono? ¿Qué relación hay entre estos cuerpos? Esta secuencia tratará dichos temas.

resolver

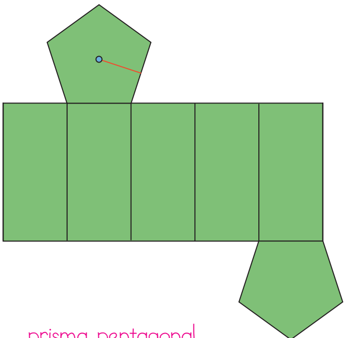
1. Las siguientes plantillas sirven para construir diversos prismas y un cilindro. Trabaja en equipo. Hagan lo que se indica y respondan en su cuaderno.



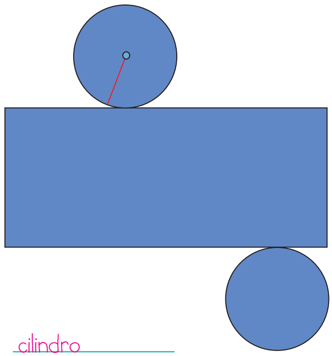
prisma triangular



prisma cuadrangular



prisma pentagonal



cilindro

a) Anoten bajo cada plantilla el nombre del cuerpo que se forma. $\frac{l}{2\pi}$, donde l es la medida
b) ¿Cuánto debe medir el radio de la circunferencia de la plantilla? del largo del rectángulo.
c) Calculen el volumen de tres cuerpos que se formen con las plantillas. R. T. Prisma cuadrangular: Tomen las medidas necesarias. 4.9 cm^3, Prisma pentagonal: 5.06 cm^3 y Cilindro: 6.1072 cm^3
d) ¿Cómo se calcula el volumen del cilindro?
$V = \pi r^2 h$

✹ Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados. En particular, mencionen cómo se calcula el volumen de un cilindro.

conect@mos

Recuerda cómo calcular el volumen de prismas y pirámides en

www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_3/matematicas_b5/oda_3222_0/recurso/

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

Ya sabemos...

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

sm

2. Lee, en equipo, la siguiente información.

Para calcular el volumen de un cilindro se usa el mismo procedimiento que para calcular el de un prisma, es decir, se multiplica el área de la base por la altura. En el caso del cilindro, la base es un círculo; por tanto, su volumen se calcula de la siguiente manera.

$$V = \pi r^2 h$$

Es importante recordar que, al multiplicar π por radio al cuadrado, se obtiene el área del círculo.

3. En la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, intervienen tres medidas que pueden variar y un valor constante, es decir, un valor que no cambia. Contesten lo siguiente.

   a) ¿Cuál es el valor constante? $\pi \approx 3.14$

   b) Si el volumen de un cilindro es 198 cm³ y el radio, 3 cm, ¿cuánto mide la altura?

   $198 = \pi(3)^2 h$, $h = \frac{198}{9\pi} = \frac{198}{9(3.14)} = 7.006$ cm

   c) Si el volumen de un cilindro es 196.3 cm³ y la altura, 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la base? $196.3 = \pi r^2(10)$, $r^2 = \frac{196.3}{\pi(10)} = 6.251$ cm², $r = 2.5$ cm

   d) Completen, con base en la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, las siguientes fórmulas.

   $h = \frac{V}{\pi r^2}$ $r^2 = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

   $r = \frac{V}{\pi h}$

Ya sabemos...

La operación inversa de elevar al cuadrado es la raíz cuadrada.

4. Respondan las siguientes preguntas; usen la fórmula del volumen del cilindro.

   a) ¿Cómo cambia el volumen si el radio de la base se duplica?

   Aumenta cuatro veces.

   b) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica?

   Aumenta dos veces.

   c) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica y el radio de la base se divide entre 2?

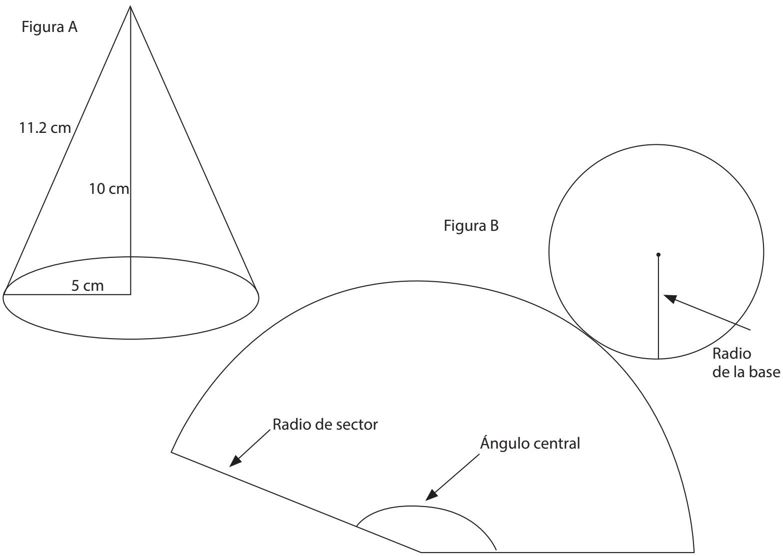
   Disminuye $\frac{1}{2}$, porque cambia en $2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

* Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas de las actividades 3 y 4 con las del grupo. En particular, comprueben si todos despejaron correctamente las variables h, r^2 y r de la fórmula para calcular el volumen del cilindro.

Un cono a la medida

CONTENIDO Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

1. Trabaja en equipo. Se quiere elaborar un cono con las medidas que se muestran en la figura A . Para ello, se necesita una plantilla similar a la figura B . Contesten las preguntas. Consideren el valor de π como 3.14.



Una pista

La parte de circunferencia que corresponde al ángulo central mide lo mismo que la circunferencia de la base del cono, cuyo radio mide 5 cm.

a) ¿Cómo se obtuvo la medida 11.2 cm? R. T. Con el teorema de Pitágoras

b) ¿Cuánto debe medir el radio del sector de la plantilla? 11.2 cm ¿Por qué? R. T. Es la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y la punta del cono.

c) ¿Y el ángulo central de la plantilla? $\frac{11.2}{5} = \frac{360}{x}$ entonces $x = 160°$

validar

Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. En particular, verifiquen si todos calcularon correctamente la medida del ángulo central de la plantilla. Si hay diferencias considerables, averigüen quién tiene razón y corrijan lo necesario.

2. Trabaja en equipo. Consideren las medidas de la actividad anterior.

a) Tracen la plantilla para elaborar el cono.

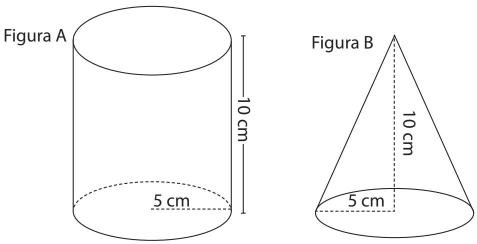
b) Recórtenla y armen el cono.

c) Verifiquen que la altura del cono mida 10 cm y el diámetro de la base, 10 cm.

3. Hagan lo siguiente.

resolver

a) Tracen en una hoja blanca una plantilla para elaborar un cilindro con las medidas que se indican en la figura **A**.



b) Recórtenla y armen el cilindro.

c) Verifiquen que el cono y el cilindro que elaboraron en la actividad anterior tengan la misma base y la misma altura.

d) ¿Cuál es el volumen del cilindro? $785\ cm^3$

e) Utilicen el cono como unidad de medida. Para medir, consigan arena, arroz o algún material similar. ¿Con cuántos conos se llena un cilindro si ambos recipientes tienen la misma base y la misma altura? con tres

f) La fórmula para calcular el volumen de un cilindro es $V = (\pi r^2)h$, **o bien**, $V = Ah$.

Considerando que A representa el área de la base y h, la altura, ¿cuál es la fórmula para calcular el volumen del cono? $V = \frac{Ah}{3}$

g) ¿Cuál es el volumen del cono de la figura **B**? $(\pi(5)^2)(10)(\frac{1}{3}) \approx 261.66$

h) ¿Cuánto debería medir la altura del cono (figura **B**) para que su volumen fuera igual al del cilindro (figura **A**)? 30 cm

- **Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. En particular, comprueben si plantearon la misma fórmula para calcular el volumen de un cono.**

4. Contesta, en equipo, lo siguiente.

» Un cilindro y un cono tienen la misma altura, pero el radio del cono mide el triple que el del cilindro. ¿Cómo se relacionan los volúmenes de ambos cuerpos?

El volumen del cono es el triple que el del cilindro.

conect@mos

Descarga la actividad relacionada con conos y pirámides en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, explica en tu cuaderno por qué la fórmula para calcular el volumen de un cono es tan parecida a la del volumen de una pirámide.

Reflexionamos

Si un cilindro y un cono tienen bases idénticas, ¿qué relación deben tener sus alturas para que sus volúmenes sean iguales? Ejemplifica con valores numéricos.

BLOQUE 5

Secuencia 3 / lección 85

Cortes con formas inesperadas

CONTENIDO

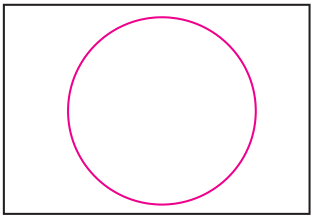
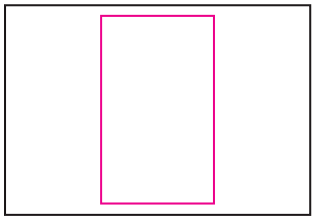
Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Si tienes un queso con forma de cilindro y lo cortas a la mitad, por el diámetro de una de sus bases, ¿qué figura geométrica se forma en la sección de corte? Y si tienes un cono y lo cortas en un plano paralelo a su base, ¿qué figura geométrica se forma en la sección de corte? ¿Cómo calcularías las medidas de esa figura geométrica?

1. Consigue plastilina y una tarjeta de plástico para efectuar las actividades de esta lección.

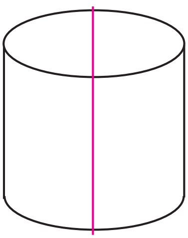
   a) Dibuja en los recuadros inferiores la sección de corte que se obtiene al cortar un cilindro como se indica en las imágenes de abajo.



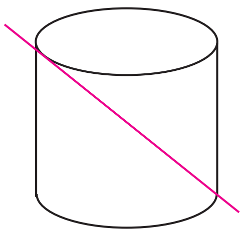



   b) Corta un cilindro de plastilina para verificar que tus dibujos sean correctos.

2. Traza en los cilindros una línea donde supongas que se deba cortar para obtener la sección que se indica abajo. Verifica tus respuestas cortando un cilindro de plastilina.



Sección con forma de rectángulo



Sección con forma de elipse

conect@mos

Aprende más acerca de conos y cilindros en

arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t02_s01_descartes/index.html

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

En contexto

Los planetas siguen una órbita en forma de elipse alrededor del Sol.

validar

Ya sabemos...

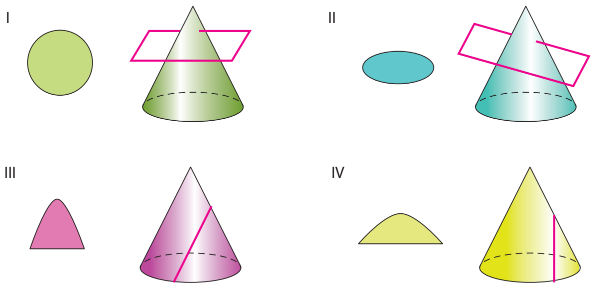
Una elipse es una curva cerrada con forma parecida a un óvalo, y tiene dos ejes de simetría.



Elipse

3. Imagina que cortas un cono de plastilina con la tarjeta.

a) En cada caso, las figuras de la izquierda representan una sección de corte. Traza una línea donde se deba cortar cada cono para obtener la sección indicada.



b) Corta un cono de plastilina siguiendo tus respuestas, con el fin de verificarlas.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después comenten la siguiente información e ilústrenla en su cuaderno con algunos ejemplos.

Las curvas que se obtienen al cortar de diferentes maneras un cono reciben el nombre de **cónicas**. En los casos I y II se forman la **circunferencia** y la **elipse;** en el caso III, la curva de la sección de corte es una **parábola**; y en el IV, una **hipérbola**.

Verifiquen que hayan obtenido la parábola y la hipérbola de la siguiente manera.

Parábola: la tarjeta debe colocarse de forma paralela a la generatriz.



Hipérbola: la tarjeta debe colocarse de forma perpendicular a la base.



Ya sabemos...

La generatriz de un cono es un segmento que une el vértice con un punto de la circunferencia de la base.



4. Trabaja en equipo. Consideren que se cortará una esfera.

a) ¿Qué tipo de figura se forma en la sección de corte? Un círculo

b) ¿Podrían obtener una elipse en la sección de corte? No

c) ¿Cómo hay que cortar la esfera para obtener, en la sección de corte, el círculo con la mayor dimensión posible?

R. T. Tiene que pasar por el centro de la esfera.

Secuencia 3 / lección 86

Recipientes cónicos

CONTENIDO

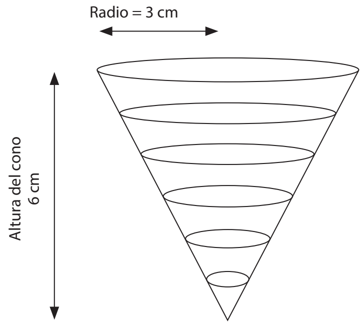
Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Una pista

Busca triángulos semejantes que se formen con cortes paralelos a la base del cono.

1. Considera un cono de papel. Completa la tabla calculando la medida del radio del círculo que se forma al cortar el cono de manera paralela a la base, en la altura indicada.

Altura del corte a partir del vértice (cm)	Radio del círculo que se forma (cm)
1	$\frac{1}{2}$
2	1
3	$\frac{3}{2}$
4	2
5	$\frac{5}{2}$
6	3



validar

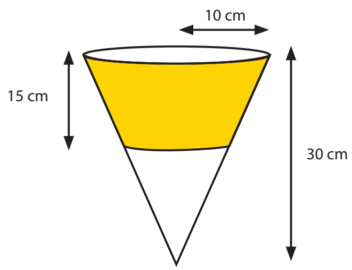
a) Demuestra con un ejemplo que las cantidades de la tabla se relacionan proporcionalmente. R. T. $0.5 \div 1 = \frac{1}{2}$ y $2 \div 4 = \frac{1}{2}$

b) ¿Por qué sucede esto? R. T. En cada fila, los datos de la columna verde son la mitad de los de la columna amarilla ($r = \frac{1}{2}h$). R. T. Se forman triángulos semejantes, donde el radio es uno de los catetos y la altura es el otro cateto.

resolver

2. Se elaboró un recipiente en forma de cono truncado a partir de un cono con las medidas que se indican en la siguiente figura. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

$V = 875\pi \text{ cm}^3 = 2\ 747.5 \text{ cm}^3$, 2.74 ℓ



Ya sabemos...

El volumen del cono se calcula multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo el resultado entre 3. Además, recuerda que 1 cm³ equivale a un mililitro.

3. Una copa tiene forma de cono. La base de éste mide 4 cm de radio y su altura, 7 cm.

a) ¿Cuánta bebida tiene la copa si faltó 1 cm de altura para llenarla? $V = 73.8564\ cm^3$



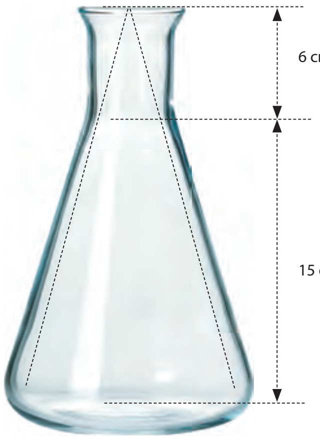
b) ¿Cuál es el radio del círculo que forma la superficie del líquido?

$r \approx 3.4285$ cm

4. Se tiene un cono de 12 cm de altura y 7 cm de diámetro en la base. Mediante un corte se obtendrá un cono más pequeño. Si se pretende que el diámetro de la base del cono pequeño sea de 5 cm, ¿a qué altura se debe hacer el corte?

Altura aprox. 3.43 cm de la base

5. Considera el siguiente matraz cónico.



En contexto

El matraz con forma cónica se llama matraz de Erlenmeyer porque fue inventado por Emil Erlenmeyer en 1861. Es muy útil cuando se desea controlar la evaporación de líquidos.

a) Observa que, a la altura de 15 cm, inicia una parte cilíndrica. El radio de la base del matraz es de 5 cm. ¿Qué capacidad tiene el recipiente sin considerar su parte cilíndrica?

$\approx 537\ cm^3$

b) Explica cómo la calculaste. R. T. De la figura se obtienen las razones.

$\frac{21}{5} = \frac{6}{x}$ de donde $x = 1.42$ Se calcula el volumen del cilindro completo

$549.77\ cm^3$, y luego se le resta el volumen del cilindro pequeño $12.66\ cm^3$.

✷ Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros. Al finalizar, retomen las preguntas de la introducción de la secuencia y respóndanlas de manera grupal.

BLOQUE

5

Secuencia 4 / lección 87

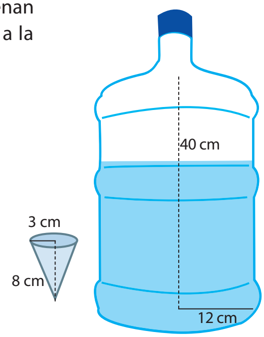
Volúmenes y capacidades

CONTENIDO Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

¿Cuánta agua le cabe a un vaso cilíndrico? ¿Y a uno de papel con forma de cono? ¿A cuál recipiente le cabe más líquido: a uno con forma de prisma o a uno con forma de cilindro? ¿En cuál de los dos recipientes anteriores se ocupa menos material al fabricarlo? Al estudiar esta secuencia, serás capaz de responder las preguntas planteadas.

1. Reúnete en equipo para responder cuántos vasos se llenan con el agua de un garrafón. Los 8 cm corresponden a la altura del vaso.

R. T. 240 vasos



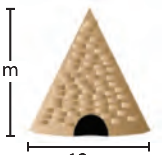
Ya sabemos...

1 cm^3 equivale a 1 ml.

2. Anota en la tabla las posibles medidas de una lata cilíndrica con capacidad para envasar un cuarto de litro de jugo.

	Altura	Radio de la base	Volumen (en cm^3)	Capacidad (en litros)
Lata	10 cm	2.82 cm	249.7	$\frac{1}{4}$ l

3. Para almacenar granos, suele utilizarse un silo.



Considerando que en un viaje un camión puede trasladar 24 m^3 de maíz. ¿En cuántos viajes se llenaría el silo? 26 viajes

En contexto

Un silo es una estructura que se utiliza para almacenar granos y otros recursos a granel. Los silos más comunes tienen forma cilíndrica, pero los hay cónicos o esféricos.

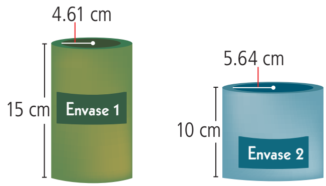
- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, localicen los errores y corrijan lo necesario. Luego planteen otras preguntas relacionadas con los problemas anteriores, por ejemplo: ¿cuál sería el volumen del silo si éste fuera cilíndrico?

4. Se sabe que 1 centímetro cúbico de cobre pesa 9 gramos. ¿Cuánto pesa un tubo de cobre como el que se muestra a continuación?



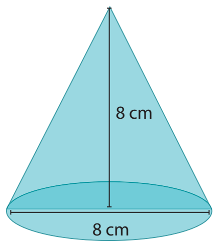
El tubo pesa 2 884 g.

5. Un fabricante desea producir un envase cilíndrico de cartón. Dos empleados le propusieron los siguientes recipientes.



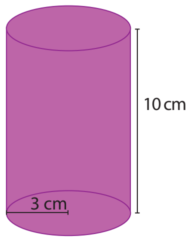
» El fabricante elegirá el envase que requiera menos material para ser fabricado. Si en ambos casos el cartón es del mismo grosor, ¿qué envase le conviene producir? El 2

6. Analiza la siguiente figura. Ésta representa un pisapapeles de vidrio.



a) Un centímetro cúbico de vidrio pesa 2.5 g. Estima, sin hacer cálculos precisos, cuánto pesa un pisapapeles cónico como el que se muestra arriba. 335 g

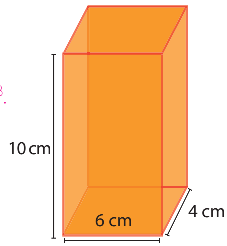
b) Haz los cálculos para saber qué tan buena fue tu estimación.



7. Trabaja en equipo. Respondan con base en el cilindro y el prisma de la derecha.

a) ¿A qué envase le cabe más líquido? Al cilíndrico. $V_c = 282.6$ cm^3, $V_p = 240$ cm^3.

b) ¿En cuál se ocupa más material al fabricarlo? En el prisma. $A_c = 244.92$ cm^2, $A_p = 288$ cm^2.



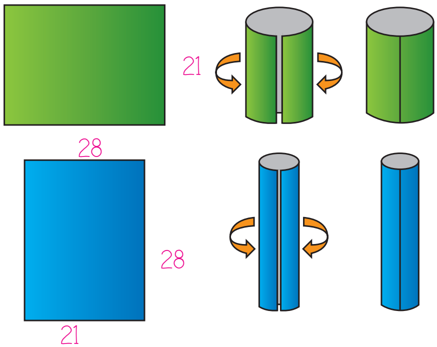
✷ Comparen sus resultados. Si hay diferencias, identifiquen si se deben al procedimiento empleado o a errores de cálculo; en todo caso, corríjanlos.

Cilindros y conos imaginarios

CONTENIDO Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

1. Consigue una hoja de papel tamaño carta. Con ella elaborarás dos cilindros diferentes.

resolver



a) Completa la siguiente tabla.

	Cilindro verde	Cilindro azul
Altura del cilindro	21 cm	28 cm
Radio de la base	$\frac{28}{2\pi} \approx 4.4585$cm	$\frac{21}{2\pi} \approx 3.3439$cm
Volumen	$\approx 1\,310.76$ cm^3	≈ 983.12 cm^3

b) ¿Qué cilindro tiene mayor volumen? El verde

✹ Comenta, en grupo, cómo hiciste los cálculos. En particular, mencionen cómo calcularon el radio de la base de los cilindros.

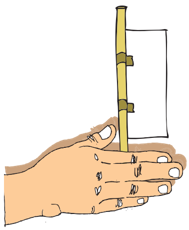
2. Para efectuar esta actividad, necesitarás un rectángulo de 5 cm de ancho por 6 cm de largo. Gíralo tomando como eje de giro, primero, el lado de 5 cm y, después, el de 6 cm.

a) ¿En qué caso se genera el cilindro de mayor volumen?

En el de $r = 6$ cm

b) Si hicieras con cartulina el molde de los cilindros que se crearon, ¿para cuál ocuparías más material?

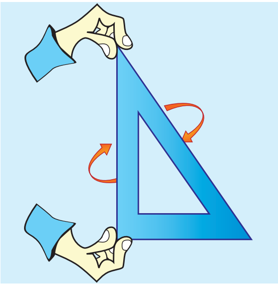
Para el primer cilindro $r = 5$ cm

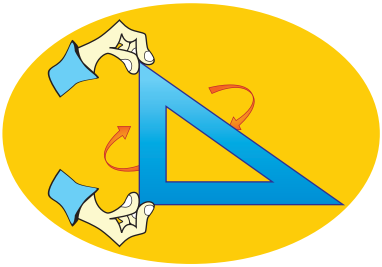


c) ¿Cuál es el volumen del primer cilindro? 565.49 cm^3

d) ¿Y el del segundo? 471.23 cm^3

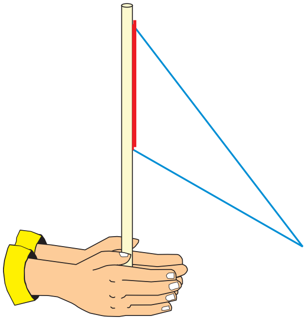
3. Para efectuar esta actividad, necesitarás la escuadra en forma de triángulo escaleno. Gírala tomando como eje de giro el cateto mayor. Haz lo mismo para el cateto menor.

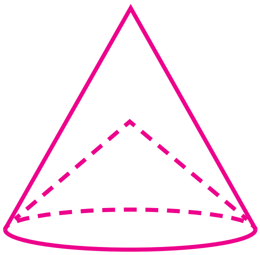




¿Cuál cono, de los dos generados, tiene mayor volumen? El que se forma al tomar como eje el cateto menor

4. Imagina que giras el siguiente triángulo obtusángulo tomando como eje de giro el lado rojo. Dibuja a la derecha de la figura el cuerpo que se generaría.





a) Describe el cuerpo que se generaría. Es un cono, con un hoyo en el centro con la forma de un cono más pequeño.

b) Calcula el volumen de dicho cuerpo. Explica qué datos usaste para hacerlo y cómo los obtuviste. R. T. Calcularía el volumen de cada cono, y restaría el menor al mayor.

- Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros. Verifiquen, en particular, que el cuerpo de la actividad 4 corresponda a un cono al que se le quita, en la parte inferior, un cono de igual base, pero con menor altura.

Convivimos

Elabora un mapa mental en el que señales lo que aprendiste acerca de los conos y cilindros, y compáralo con el de tus compañeros. Después agrega a tu mapa la información importante que no habías considerado.

comunicar

conect@mos

Calcula más volúmenes de conos en

www.aplicaciones.info/decimales/geoes05.htm

Lee la información que se presenta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta con un compañero qué dificultades tuviste al resolver la actividad.

BLOQUE 5

Secuencia 5 / lección 89

Cantidades que cambian y se relacionan

CONTENIDO

Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

En la vida real hay muchos ejemplos de cantidades que cambian y se relacionan. Con frecuencia, esas relaciones se pueden expresar mediante una fórmula.

resolver

1. Analiza, en equipo, el siguiente problema. Después hagan lo que se indica.

Doña Juana vende tamales en el mercado. El precio de venta de cada tamal es de $10.00, y su costo de producción, $6.50. Sin embargo, ella debe pagar $150.00 diarios por el alquiler del espacio donde los vende.

a) ¿Cuánto obtiene de ganancia si en un día vende 50 tamales? $25.00

b) ¿Doña Juana puede tener pérdida en lugar de ganancia después de la venta de un día?

Sí ¿Por qué? Por los gastos de producción y del alquiler.

c) Escriban una fórmula que permita a doña Juana calcular la ganancia o pérdida para cualquier cantidad de tamales vendidos. $x(3.5) - 150 = y$

d) Usando la fórmula anterior, contesten: ¿a partir de qué cantidad de tamales vendidos empieza a tener ganancia? 43 tamales

e) ¿Cuántos tamales debería vender para ganar $375.00? 150

ya que $\frac{375 + 150}{3.5} = 150$

* Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen, en particular, las fórmulas que escribieron y anoten ejemplos para los siguientes casos.

» Fórmulas iguales pero con distintas literales: $3.5n - 150 = m$

$3.5p - 150 = q$

» Fórmulas exactamente iguales: $3.5t - 150 = g$ $3.5t - 150 = g$

» Fórmulas equivalentes: $10t - 6.5t - 150 = g$ $3.5t - 150 = d$

» Fórmulas erróneas, es decir, que no relacionan adecuadamente los datos:

$10t - 6.5 - 150 = g$ $10 - 150t = g - 150$

2. Trabaja en equipo. La Copa Mundial de Futbol se juega cada cuatro años. En 1986 se llevó a cabo en México. Contesten lo siguiente.

a) Suponiendo que este torneo se siga jugando cada cuatro años, ¿habrá Copa Mundial en el año 2040? No ¿Por qué? R. T. Porque es cada cuatro años, pero 54 (2 040 - 1986 = 54) no es múltiplo de 4.

b) En 1986 se jugó en México la decimotercera (13ª) Copa Mundial de Futbol. ¿En qué año tendrá lugar la trigésima (30ª)? en 2054

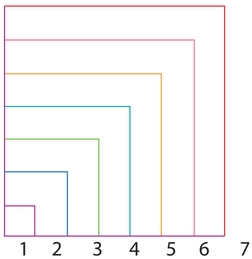
c) Subrayen la fórmula que permita calcular el año (A) en que se jugará la enésima Copa Mundial. Después, usen esa fórmula para validar sus respuestas anteriores.

$A = 4(n + 13) + 1986$ $A = 4(n + 13) - 1986$

$A = 4(n - 13) - 1986$ $\underline{A = 4(n - 13) + 1986}$

Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los del resto del grupo. Comenten, en particular, cuál es la manera más eficiente para saber si habrá Copa Mundial en el año 2094.

3. La siguiente figura está formada por varios cuadrados. Supongamos que el cuadrado 1 mide 0.25 m de lado; el 2, 0.5 m de lado; el 3, 0.75 m de lado; y así sucesivamente. Haz, en equipo, lo que se indica.



a) ¿Cuál es el perímetro del cuadrado 1? $(0.25)4 = 1$

b) ¿Y el del 4? $(1)4 = 4$

c) ¿Qué cuadrado mide 2.25 m² de área? el 6

d) Escriban una expresión algebraica que permita calcular el área del enésimo cuadrado.

$A = (0.25n)^2$

Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los del resto del grupo. Usen la expresión algebraica que anotaron en el inciso d) para calcular el área del cuadrado número 30.
A = 56.25 m², para el cuadrado número 30.

conect@mos

Descarga la actividad de variación entre dos conjuntos de cantidades en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar, comenten con el resto del grupo por qué la gráfica que obtuvieron no es una línea recta.

técnicas

Secuencia 5 / lección 90

Índice de Masa Corporal

CONTENIDO Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

En contexto

Conoce aplicaciones de las matemáticas en diversas situaciones cotidianas o relacionadas con otras disciplinas en *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, de la Biblioteca de Aula.

Régules, Sergio de, et al., *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, serie Espejo de Urania, 2003.

1. En la siguiente tabla se muestra el peso de cuatro personas. Dos tienen peso normal y las otras, peso insuficiente, sobrepeso u obesidad.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
Peso	50 kg	55 kg	76 kg	70.5 kg

a) Sólo con esta información, ¿puedes decir quiénes tienen peso normal? Si consideras que sí, escribe quiénes lo tienen; si consideras que no, explica qué información falta.

R. T. Falta la estatura de las personas.

b) A continuación se muestran las estaturas de las mismas cuatro personas.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
Estatura	1.60 m	1.75 m	1.80 m	1.56 m

» Con esta nueva información, ¿quiénes consideras que son las dos personas con peso normal? Miranda y Claudia

2. El Índice de Masa Corporal (IMC) es una medida que relaciona el peso y la talla de una persona; se utiliza, entre otras cosas, para evaluar su estado nutricional. Se calcula mediante la siguiente fórmula, donde E representa la estatura en metros y P, el peso en kilogramos.

$$IMC = \frac{P}{E^2}$$

En la tabla se registran los rangos, determinados por la Organización Mundial de la Salud, en los que una persona es considerada con bajo peso, peso normal, sobrepeso u obesidad.

IMC	La persona se considera con…
Menos de 18.5	Peso insuficiente
Entre 18.5 y 24.9	Peso normal
Entre 25 y 29.9	Sobrepeso
A partir de 30	Obesidad

a) Determina el índice de masa corporal y el rango en qué se encuentran las personas de la actividad 1.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
IMC	19.53	17.95	23.45	28.96
La persona se considera con…	peso normal	peso insuficiente	peso normal	sobrepeso

b) Calcula el peso de las siguientes personas. Ten en cuenta que todas tienen un IMC mayor a 25, es decir, tienen sobrepeso u obesidad.

resolver

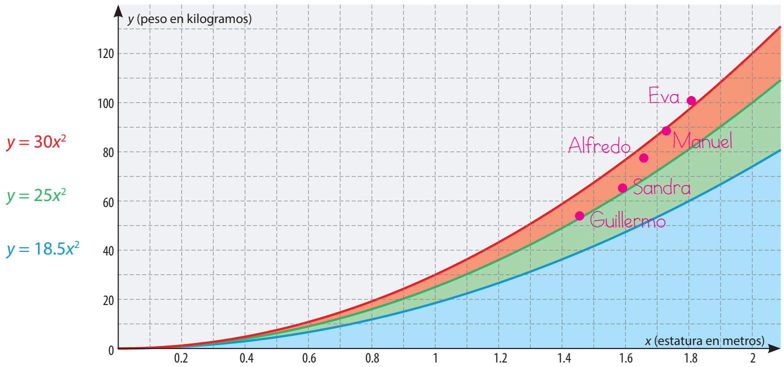
	Sandra	Eva	Alfredo	Manuel	Guillermina
Estatura	1.57 m	1.80 m	1.65 m	1.72 m	1.45 m
IMC	27	31	28.5	30	25.5
Peso	66.55 kg	100.44 kg	77.59 kg	88.75 kg	53.61 kg

c) Subraya la fórmula que sirve para calcular el peso de una persona.

$\underline{P = (\text{IMC})E^2}$ $\qquad P = (\text{IMC})E \qquad P = \frac{\text{IMC}}{E^2} \qquad P = \frac{\text{IMC}}{E}$

d) Propón, para las personas del inciso b), un peso con el cual estarían en el rango normal.
R. P.

3. **Un nutriólogo entrega a sus pacientes una gráfica como la siguiente, que sirve para saber, sin hacer cálculos, en qué rango de peso se encuentra una persona.**



a) Señala en la gráfica, por medio de puntos, dónde se ubican las personas de la actividad 2.

b) ¿Qué significa que un punto esté situado en la parábola roja? Que tiene sobrepeso.

c) ¿Y en la región verde? Que tiene peso normal.

d) Un paciente de 1.67 m de estatura inició un tratamiento contra el sobrepeso. A lo largo de cinco consultas ha registrado los siguientes pesos.

Consulta 1	Consulta 2	Consulta 3	Consulta 4	Consulta 5
70 kg	68 kg	62.5 kg	56 kg	51.5 kg

» ¿Qué tipo de recomendación debería hacer el médico? Responde en tu cuaderno.
R. P.

✹ **Compara, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. En particular, comenten la manera en que dedujeron el significado de las parábolas de la actividad 3.**

conect@mos

Analiza más ejemplos de cantidades que cambian y se relacionan en

recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/paneles/actividad.html

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen y validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

BLOQUE 5

Secuencia 6 / lección 91

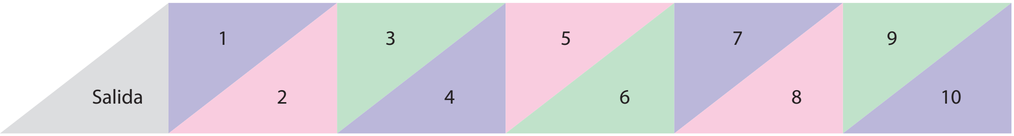
Juegos equitativos I

CONTENIDO
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

¿Alguna vez te has preguntado si las reglas de un juego son justas? En esta secuencia analizarás las condiciones necesarias para garantizar que, en un juego de azar, todos los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar.

resolver

1. Consigue un par de dados y tres fichas pequeñas. Reúnete con dos compañeros para jugar carrera a 10. Lean las instrucciones del juego y, antes de empezar a jugar, respondan el inciso a).



» Los tres jugadores, A, B y C, colocan su ficha en la casilla de salida.

» Uno de los jugadores (no importa cuál) lanza los dos dados simultáneamente. Si ambos caen en número par, el jugador A avanza una casilla; si ambos caen en número impar, el jugador B avanza una casilla; si un dado cae en número par y el otro, en impar, el jugador C avanza una casilla.

» Después de que avance el jugador al que le haya correspondido hacerlo, se pasan los dados a otro jugador y se repite el procedimiento anterior. Gana el primero que llegue a la casilla 10.

a) Discutan si alguno de los jugadores tiene alguna ventaja. Anoten sus conclusiones.

El jugador C tiene mayor posibilidad de ganar.

b) Acuerden quién será el jugador A, y quiénes, el B y el C. Si dos o más integrantes del equipo desean ser el mismo jugador, decídanlo con un volado o disparejo.

c) Empiecen el juego. Al terminar, numeren los distintos equipos y llenen, con ayuda del profesor, una tabla como la siguiente con los resultados del grupo.

	Cantidad de casillas avanzadas				
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	...	Total
Jugador A	R. P.				
Jugador B					
Jugador C					

d) ¿En cuántos equipos ganó el jugador A? R. P. ¿Y el B? R. P. ¿Y el C? R. P.

e) Calculen la probabilidad que tienen los jugadores de avanzar en cada lanzamiento.

Jugador A: $\frac{1}{4}$ Jugador B: $\frac{1}{4}$ Jugador C: $\frac{1}{4}$

- **Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Verifiquen si los resultados del juego concuerdan o no con sus conclusiones del inciso a) y las probabilidades del inciso e). Después comenten la siguiente información.**

El juego carrera a 10 **no es un juego justo** pues, aunque cualquiera de los jugadores puede ganar, **el jugador C tiene ventaja**, ya que en cada tirada **su probabilidad de avanzar es de** $\frac{1}{2}$, mientras que, para **los jugadores A y B, la probabilidad es** de $\frac{1}{4}$ en ambos casos.

2. Propongan un método para que el juego carrera a 10 sea justo. Pueden agregar nuevas reglas o modificar alguna existente. comunicar

R. P.

- **Comenten, con el resto del grupo, las propuestas de los distintos equipos. Discutan si con esas modificaciones el juego es justo o no.**

3. Analiza las siguientes modificaciones para el juego carrera a 10. Explica en tu cuaderno si con esas reglas el juego es justo o no.

a) Modificar las reglas para avanzar: si ambos dados caen en número par, el jugador A avanza 2 casillas; si ambos caen en impar, el B avanza 2 casillas; si un dado cae en par y el otro, en impar, el C avanza 1 casilla.

b) Modificar las reglas para avanzar: si ambos dados caen en número par, el jugador A avanza 3 casillas; si ambos caen en impar, el B avanza 3 casillas; si un dado cae en par y el otro, en impar, el C avanza 1 casilla.

c) Modificar las reglas para avanzar: si la suma de ambos dados es 2, 3 o 4, el jugador A avanza 1 casilla; si la suma es 7, el B avanza 1 casilla; si la suma es 11 o 12, el C avanza 2 casillas.

d) Mantener las mismas reglas para avanzar, pero ampliar el tablero para que el jugador C deba llegar hasta la casilla 20.

e) Mantener las mismas reglas para avanzar, pero que los jugadores A y B ganen al llegar a la casilla 5.

- **Comenta, con el grupo, tus respuestas de la actividad anterior. Expliquen, en particular, por qué la propuesta del inciso c) hace que el juego sea justo, pero más lento.**

Secuencia 6 / lección 92

Juegos equitativos II

CONTENIDO

Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

En contexto

En *Una ventana a la incertidumbre*, de la Biblioteca Escolar, se presentan diversas situaciones de probabilidad y se revisan los problemas que originaron esta rama de las matemáticas.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

técnicas

1. Kathya y Aldo jugarán "disparejo" lanzando monedas.

» Ambos jugadores inician el juego sin fichas.
» Uno de los jugadores (no importa cuál) lanza varias monedas simultáneamente. Si las monedas coinciden, es decir, si todas caen en águila o todas caen en sol, Kathya recibe una ficha; si las monedas no coinciden, es decir, si al menos una cae en águila y la otra, en sol, Aldo recibe una ficha.
» Gana el primer jugador que consiga 32 fichas.

a) Aldo propone jugar con tres monedas. ¿Le conviene a Kathya la propuesta? No

Explica por qué. R. T. Kathya sólo ganaría con dos de las ocho combinaciones posibles (AAA y SSS); en cambio, Aldo ganaría con las otras seis combinaciones.

b) ¿Con cuántas monedas el juego es justo? Con dos.

Explica por qué. R. T. Kathya ganaría con SS o AA; Aldo, con AS o SA. Ambos ganan con dos de las cuatro combinaciones.

2. Trabaja en equipo. Calculen y anoten, para cada jugador, la probabilidad de obtener una ficha si se lanzan las monedas indicadas.

Se lanzan…	2 monedas	3 monedas	4 monedas	5 monedas
Probabilidad de que Kathya gane una ficha	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$
Probabilidad de que Aldo gane una ficha	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$	$\frac{30}{32} = \frac{15}{16}$

3. Determinen, a partir de los resultados de la tabla anterior, en qué casos el juego es justo y en cuáles no. En los casos en que no lo sea, modifiquen las reglas del juego para hacerlo justo.

	¿El juego es justo?	Modificaciones para hacerlo justo
Con 2 monedas	Sí	-----------
Con 3 monedas	No	R. P.
Con 4 monedas	No	R. P.
Con 5 monedas	No	R: P.

sm

* Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de las tres actividades anteriores. Asegúrense de que todos concuerden en qué juegos son justos y cuáles no. Después comparen las distintas propuestas que formularon para que todos los juegos fueran justos.

4. Completa las modificaciones para hacer que el juego sea justo en cada inciso.
Cada vez que las monedas no coinciden, Aldo gana una ficha; y…

a) si se lanzan dos monedas y ambas coinciden, Kathya gana ___una___ fichas.

b) si se lanzan tres monedas y todas coinciden, Kathya gana ___tres___ fichas.

c) si se lanzan cuatro monedas y todas coinciden, Kathya gana siete fichas.

d) si se lanzan cinco monedas y todas coinciden, Kathya gana ___quince___ fichas.

* Lean, con ayuda del profesor, la siguiente información. Después revisen nuevamente las propuestas que hicieron en la actividad 2 de la lección anterior, y en las actividades 3 y 4 de esta lección.

El juego carrera a 10, expuesto en la lección anterior, no es justo, pues el jugador C tiene mayor probabilidad de avanzar que los jugadores A y B. Una manera de hacerlo justo es que A y B avancen dos casillas en lugar de una pues, como las probabilidades de avanzar de A, B y C son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente, se espera que, por ejemplo, en 20 lanzamientos suceda lo siguiente.

» Que en cinco ocasiones (la cuarta parte de 20) ambos dados caigan en número par; así, el jugador A avanzaría 10 casillas en total.
» Que en cinco ocasiones (la cuarta parte de 20) ambos dados caigan en número impar; así, el jugador B avanzaría 10 casillas en total.
» Que en 10 ocasiones (la mitad de 20) un dado caiga en número impar y el otro, en impar; así, el jugador C avanzaría 10 casillas en total.

Esto no quiere decir que los tres jugadores avancen siempre igual, sino que todos tienen la misma probabilidad de ganar, es decir, el juego es justo.

5. Julián y Alfonso tienen, cada uno, una caja con pelotas: algunas son rojas y otras, azules. Cada uno sacará una pelota de su caja. Si ninguna es roja o ambas lo son, las vuelven a meter a las cajas y el juego continúa; si una es roja y la otra no, gana el jugador que haya sacado la pelota roja.

a) Sugiere una cantidad distinta de pelotas (rojas y azules) para cada caja, de manera que el juego sea justo. R. T. Ambas cajas con una pelota roja y una azul.

b) Sugiere una cantidad distinta de pelotas para cada caja, de manera que uno de los jugadores tenga ventaja. R. T. Caja 1 con sólo una pelota roja, y en la otra caja una pelota roja y una azul.

c) Sin cambiar la cantidad de pelotas que sugeriste para cada caja en el inciso b), modifica las reglas del juego para que éste sea justo. R. T. El jugador de la caja 2 gana si ambas pelotas son rojas.

* Compara, en grupo y con ayuda del profesor, las propuestas de la actividad anterior. En particular, comenten si el juego es justo cuando la caja de algún jugador no tiene pelotas rojas.

Convivimos

Una notación y un vocabulario adecuados permiten comunicar de manera clara las ideas matemáticas. ¿Decir que un juego es justo es lo mismo que decir que es parejo? Comenta tu respuesta con un compañero y lleguen a una conclusión común.

conect@mos

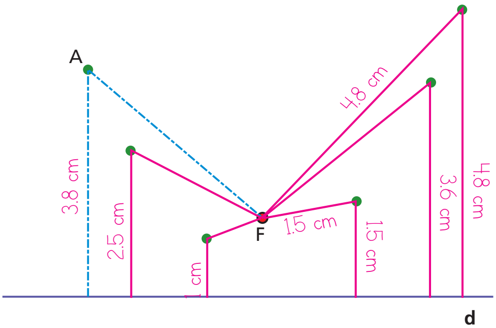
Descarga la actividad de juegos justos e injustos en

www.conectadigital-sm.com.mx/actividades-con-tecnologia

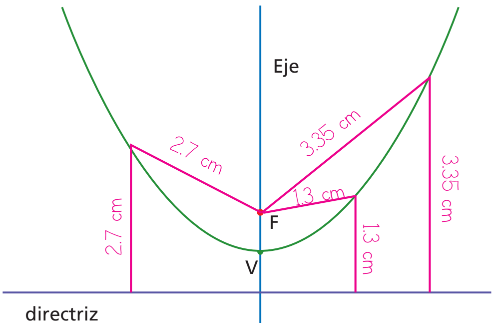
Haz, en equipo, la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al final, comparen, en grupo y con ayuda del profesor, las modificaciones que harían al juego para que sea justo.

Reflectores parabólicos

En el siguiente diagrama…



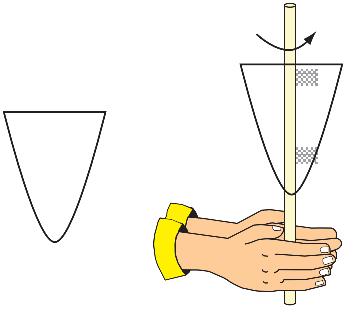
- El punto **A** está a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**. Verifícalo midiendo con tu regla los segmentos punteados.
- Los demás puntos también están a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**. Verifícalo con tu regla.
- Marca otros tres puntos que estén a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**.



Si continuaras marcando más puntos que estén a la misma distancia de la recta **d** y del punto **F**, ¡notarías que todos los puntos forman una parábola como las que graficaste con las expresiones de segundo grado!

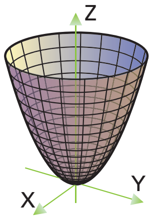
El punto **F** se llama *foco de la parábola* y la recta **d** se llama *directriz*. El eje de simetría de la parábola es una recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y por el foco.

- Señala tres puntos sobre la parábola y verifica que el foco y la directriz sean equidistantes respecto a cada punto.



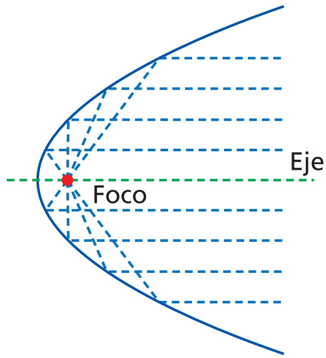
- ¿Recuerdas que al girar un círculo se genera una esfera? Recorta una superficie que tenga un lado curvo, en forma de parábola, y un lado recto (como la del dibujo), pega un popote en el eje de giro y hazla girar.

El cuerpo que se genera es un sólido de revolución que recibe el nombre de *paraboloide de revolución*.



Las parábolas y los paraboloides de revolución tienen una propiedad importante relacionada con la luz; ésta se describe a continuación.

Cuando un rayo de luz proveniente de un foco choca contra un espejo con forma de parábola, el rayo se refleja y continúa su camino paralelamente al eje de la parábola.



Todos los rayos que se originan en el foco forman un poderoso haz al ser reflejados. De este modo, es posible concentrar la luz y proyectarla hacia alguna dirección.

De manera inversa, si un haz de rayos paralelos al eje choca contra uno de estos espejos, cada rayo se dirigirá al foco después de reflejarse.
Una aplicación común de este fenómeno se encuentra en los faros de los coches y otros tipos de lámparas, que son paraboloides de revolución con una superficie reflejante: al colocar una fuente de luz en el foco del paraboloide, los rayos emitidos chocan contra la superficie reflejante y forman un haz de luz parelelo que, al no dispersarse, puede verse a gran distancia.



Calentador



Antena parabólica



Faro de automóvil

El comportamiento de las ondas de radio y las ondas electromagnéticas es similar al de la luz. Por eso se utilizan reflectores parabólicos para concentrar ondas de radio emitidas desde fuentes débiles y convertirlas en un haz intenso. Las antenas parabólicas, por ejemplo, reciben señales débiles y concentran en el foco señales relativamente fuertes.

Como dato curioso, la antorcha de los Juegos Olímpicos se enciende mediante un reflector parabólico, que concentra los rayos del sol en un solo punto.

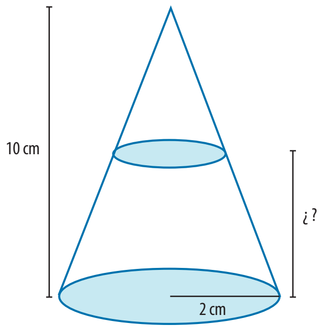
Selecciona la opción correcta.

1. La entrada a un circo cuesta $50.00 por adulto y $20.00 por niño. En un día se vendieron 220 boletos y se recaudaron $6 320.00. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

a) 60 de adulto y 160 de niño. b) 62 de adulto y 158 de niño.

c) 64 de adulto y 156 de niño. d) 66 de adulto y 154 de niño.

2. Un cono mide 10 cm de altura y 2 cm de radio en la base. Se cortará de manera que el círculo pequeño del cono truncado tenga $\frac{1}{4}$ de la superficie del círculo grande. ¿A qué altura hay que cortar para obtenerlo?



a) A 2 cm de la base.

b) A 2.5 cm de la base.

c) A 5 cm de la base.

d) A 7.5 cm de la base.

3. Manuel tiene dos recipientes, uno cilíndrico y otro cónico. Ambos tienen el mismo radio en su base, pero el cono tiene la mitad de altura. ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cilindro que el del cono?

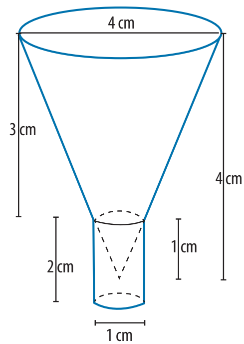
a) Tres veces.

b) Cuatro veces.

c) Cinco veces.

d) Seis veces.

4. El embudo de la figura de la derecha está formado por un cono truncado y un cilindro en la punta. ¿Cuál es el volumen del embudo?



a) 18.06 cm^3

b) 19.06 cm^3

c) 20.06 cm^3

d) 21.06 cm^3

5. El área de un rectángulo es de 80 cm², y su largo (x) mide 2 cm más que el ancho. ¿Qué expresión algebraica permite conocer sus medidas?

a) $x^2 - 2x = 80$ b) $x^2 - x = 80$

c) $x^2 + x = 80$ d) $x^2 + 2x = 80$

6. ¿En qué inciso se muestran dos resultados (R_1, R_2) igualmente probables para el lanzamiento de dos dados?

a) R_1 = que la suma de ambos dados sea par; R_2 = que ambos dados caigan en 6.

b) R_1 = que la suma de ambos dados sea 10; R_2 = que la suma de ambos dados sea 4.

c) R_1 = que la suma de ambos dados sea 12; R_2 = que ambos dados caigan en número par.

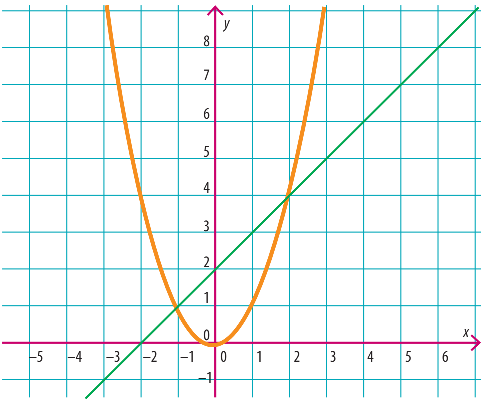
d) R_1 = que la suma de ambos dados sea 7; R_2 = que la suma de ambos dados sea impar.

7. Daniel y Carlos juegan a lanzar dos dados y multiplicar los números que salgan. Daniel gana si el resultado es par y Carlos, si es impar. ¿Qué afirmación es correcta según lo establecido en el juego?

a) Carlos tiene poca ventaja. b) Daniel tiene poca ventaja.

c) Daniel tiene mucha ventaja. d) Ninguno tiene ventaja.

Considera la siguiente gráfica y selecciona la opción correcta.



8. ¿Cuál es la ecuación de la recta?

a) $y = x + 2$ b) $y = x - 2$

c) $y = 2x$ d) $y = -2x$

9. ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

a) $y = 4x^2$ b) $y = x^2 + 4$

c) $y = x^2$ d) $y = -x^2$

10. ¿En qué puntos se intersecan la recta y la parábola?

a) (1, –1) y (4, 2) b) (–1, 1) y (2, 4)

c) (1, 1) y (2, 4) d) (–1, 1) y (4, 2)

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Probabilidad engañosa



En una ciudad de 10 000 habitantes se ha cometido un robo. La única pista es que el ladrón mide más de 1.90 m, una estatura poco común que sólo rebasan 100 personas de la población. La policía detiene a varios sospechosos cerca de la escena del crimen y comprueba que uno mide 1.94 m. El abogado acusador argumenta lo siguiente: "Hay 9 999 inocentes y de ellos sólo 99 miden más de 1.90 m; entonces, la probabilidad de que un inocente mida más de 1.90 m es de 99/9 999 ≈ 1%. Como la probabilidad anterior es cercana a 1%, entonces la probabilidad de que el sospechoso sea culpable es cercana a 99%".

Pregunta 1. ¿Cuántas personas en la ciudad miden más de 1.90 m? ¿Cuántas de ellas son inocentes?

R. T. Como 100 personas miden más de 1.90 m; 99 de ellas son inocentes.

Pregunta 2. Calcula la probabilidad de que una persona que mide más de 1.90 sea inocente y compárala con la probabilidad de que una persona inocente mida más de 1.90 m.

$P_1 = \frac{99}{100}$ representa el 99%

$P_2 = \frac{99}{9999} \approx 1\%$

Pregunta 3. El argumento del abogado es un error típico que se comete en probabilidad, conocido como la "falacia del fiscal". Investiga en qué juicios reales se convenció al jurado utilizando este tipo de razonamientos erróneos.

R. P.

Pregunta 4. ¿Qué error comete el abogado en su argumentación?

Confundir las dos probabilidades que se mencionan en la pregunta 2.

Pregunta 5. ¿Qué opinas sobre el mal uso de la probabilidad y la estadística en los juicios y en la prensa?

R. P.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

Un invento útil



En 1795, un famoso general europeo ofreció una cantidad considerable de dinero a quien inventara una manera efectiva para conservar los alimentos frescos durante las largas campañas militares. Así surgió la lata, que sigue siendo un recipiente común para envasar alimentos y otros productos perecederos. Una de las latas más comunes es la de forma cilíndrica, que proporciona un gran volumen con poco material.

Pregunta 1. ¿Cuánto mide el diámetro de una lata cilíndrica de 10 cm de altura y 1 000 cm^3 de volumen?

a) 35.41 cm b) 31.84 cm c) 11.28 cm d) 5.64 cm

Pregunta 2. Calcula la cantidad necesaria de material para fabricar la lata anterior. Sugerencia: imagina el tamaño y la forma de cada pieza desdoblada (tapas y cara lateral).

354.37 cm^2 — 10 cm — $(5.64)2\pi$ cm

$r = 5.64$ — $A = 99.93\ cm^2$

$r = 5.64$ — $A = 99.93\ cm^2$

$A_{total} = 554.23\ cm^2$

Pregunta 3. Calcula las dimensiones de una lata con forma de prisma rectangular, que tenga la misma altura y el mismo volumen que la lata anterior.

R. T. Puede ser un prisma cuya base mida 25 cm × 4 cm y altura 10 cm. Otro puede ser 50 cm × 2 cm y altura 10 cm.

Pregunta 4. Calcula la cantidad necesaria de material para fabricar la lata anterior.

R. P. (Dependerá de las dimensiones que tenga el alumno en la pregunta anterior.)

Pregunta 5. Investiga a qué famoso general hace alusión el texto introductorio, y quién inventó la lata que conocemos actualmente.

Al general Napoléon Bonaparte y la inventó Nicolas Appert.

Autovaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.				
Formulo problemas a partir de una ecuación dada.				
Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto.				
Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.				
Diseño las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.				
Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.				
Analizo situaciones problemáticas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.				
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Y para terminar...

El hotel infinito

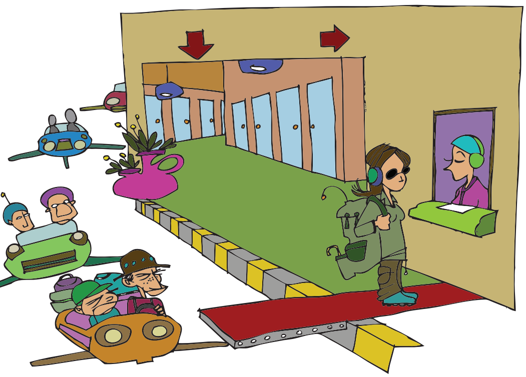
En un planeta muy lejano existe un hotel muy peculiar. Se llama Hotel Infinito, debido a que tiene un número infinito de habitaciones. El planeta está situado en un lugar de mucho tránsito espacial, por lo que no es extraño que el hotel se encuentre lleno. Una noche llegó una exploradora y pidió una habitación; y el recepcionista le dijo: "Distinguida señorita, el hotel está lleno, pero no se preocupe. Tenemos la solución perfecta". El recepcionista tomó un micrófono que tenía a su lado y su voz suave sonó en todas las habitaciones: "Estimados huéspedes, por favor, sean tan amables de fijarse en su número de habitación. Súmenle uno y pásense a la habitación con ese número". A continuación le dijo a la exploradora: "Señorita: la llevo a su habitación".

• ¿Cuál fue la habitación que ocupó la exploradora? La número 1

En otra ocasión en la que el hotel también estaba lleno, un agente de viajes llegó, muy angustiado, a la recepción. La razón de su angustia era que venía con una cantidad infinita de turistas que deseaban alojarse en el hotel. El recepcionista le dijo: "Distinguido amigo, el hotel está lleno, pero no se preocupe. Tenemos la solución perfecta". La voz del recepcionista se escuchó nuevamente en todas las habitaciones: "Estimados huéspedes, por favor, sean tan amables de fijarse en su número de habitación. Multiplíquenlo por dos y pásense a la habitación con ese número". El recepcionista sonrió al agente de viajes y le dijo: "Listo, sus turistas pueden ocupar sus habitaciones".

• ¿Cuáles fueron las habitaciones que ocuparon los turistas?

Todas las impares



Un día, las primeras 100 habitaciones del hotel estaban vacías. Lamentablemente para el recepcionista, ese día habían cerrado las escuelas, por lo que debió llevarse al trabajo a sus 100 hijos. Para que no se aburrieran les propuso un juego: "Escúchenme bien, las puertas de las primeras 100 habitaciones están cerradas. Quiero que uno de ustedes vaya corriendo y abra todas esas puertas; luego, quiero que el segundo de ustedes pase por las puertas con un número par y las cierre; quiero que el tercero de ustedes pase por las puertas cuyo número sea múltiplo de 3 y, si una puerta está abierta, la cierre, y, si está cerrada, la abra; quiero que el cuarto de ustedes pase por las puertas cuyo número sea múltiplo de 4 y, si una puerta está abierta, la cierre, y, si está cerrada, la abra. Y así sucesivamente, hasta el último. Al final, quiero que escriban una lista con las puertas que quedaron abiertas".

• ¿Puedes hacer la lista con las puertas que quedarán abiertas después de que pasen los 100 niños? (Una pista: resuelve primero versiones más sencillas del problema; por ejemplo, con 10 puertas y 10 niños, luego con 30 puertas y 30 niños…).

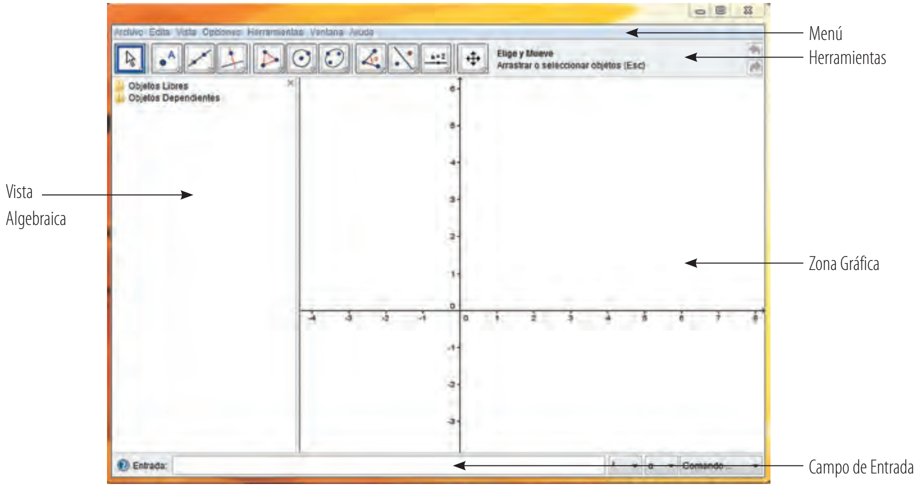
Todas quedan cerradas excepto las que son cuadrados perfectos

¿Geometría en la computadora?

Conoce GeoGebra

Puedes descargarlo gratis de la página www.geogebra.org/cms/

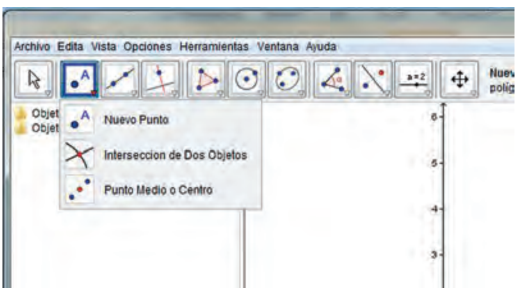
Y aparecerá una pantalla como la siguiente.

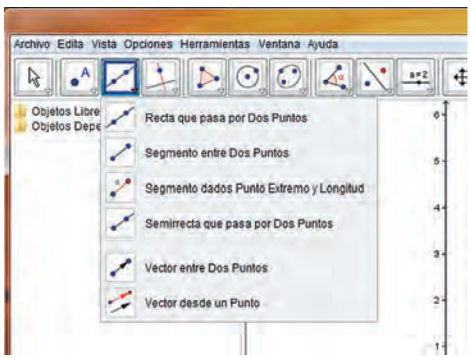


La barra de herramientas es la que contiene los comandos para hacer construcciones geométricas.

Al hacer clic en alguno de los botones de la barra de herramientas, aparece una lista de comandos.

Por ejemplo, las listas de comandos del botón donde hay un punto o donde está la recta se muestran a continuación.

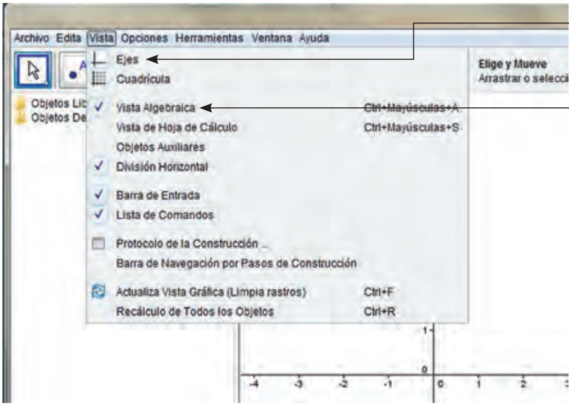




Para elegir un comando, basta hacer clic en él y colocarse en la **Zona Gráfica**; entonces, el apuntador toma la forma de una pequeña cruz. Al hacer clic, puedes iniciar los trazos. Para seleccionar algún elemento, la cruz se cambia por el apuntador (la flecha).



Si no necesitas la **Vista Algebraica** o los ejes de coordenadas, puedes ocultarlos haciendo clic en **Vista**, en la barra de menú, y después en dichos elementos.



Exploren e investiguen.

1. **Exploren y empiecen a conocer el programa haciendo lo siguiente.**
   a) Tracen un punto. Hagan clic con el botón derecho del ratón y seleccionen **Muestra rótulo**. Aparecerá la letra A; es el nombre del punto.
   b) Tracen una **recta** que pase por el punto A.
   c) Tracen otro punto. Hagan clic con el botón derecho del ratón y seleccionen **Muestra rótulo**. Aparecerá la letra B.
   d) Tracen una **semirrecta** que inicie en el punto B.
   e) Tracen el **segmento** AB.
   f) Borren lo que tienen en pantalla. Para ello, seleccionen todo lo que han trazado y opriman la tecla (⟵) (la que normalmente se usa para borrar) o la tecla Suprimir.
   g) Busquen la herramienta para trazar un triángulo y trácenlo.
   h) Tracen un **polígono** de seis lados. Cuando lo hayan trazado, seleccionen uno de los vértices y muévanlo para deformar el polígono.
   i) Tracen un **polígono regular** de seis lados.
   j) Tracen tres rectas que tengan diferentes relaciones entre sí, por ejemplo:
      • que las tres pasan por un punto;
      • que dos sean paralelas y la tercera las corte.
      Exploren las diferentes posiciones con las que se pueden relacionar tres rectas.
   k) Encuentren dos maneras diferentes de trazar un cuadrado.

2. Compartan sus observaciones y hallazgos con otros compañeros.

Glosario

Ángulo de inclinación de una recta: ángulo más pequeño que forman la recta y el eje horizontal del plano cartesiano. Si la pendiente de la recta es negativa, la medida del ángulo también se considera negativa.

Cateto: lado que forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Centro de homotecia: punto donde concurren las rectas que unen vértices correspondientes de figuras homotéticas.

Coseno de un ángulo: cociente o razón entre el cateto adyacente a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Criterio de congruencia para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son congruentes; por ejemplo, el criterio LLL (si dos triángulos tienen tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes).

Criterio de semejanza para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son semejantes; por ejemplo, que los triángulos tengan dos ángulos correspondientes iguales.

Desarrollo plano: conjunto de figuras planas que, al pegarlas, forman un cuerpo geométrico; por ejemplo, el desarrollo plano de un cilindro consta de dos círculos (tapas del cilindro) y un rectángulo (cara lateral del cilindro).

Desviación: para un conjunto de datos numéricos, valor absoluto de la diferencia entre un dato y el promedio.

Desviación media: promedio de las desviaciones de los datos de un conjunto numérico.

Ecuación de segundo grado: ecuación de una variable en la que el exponente más grande de la variable es 2; por ejemplo, $3x^2 + 5x = 2x^2 - 8$.

Espacio muestral: conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Eventos complementarios: dos eventos de un experimento aleatorio que abarcan todo el espacio muestral, pero no tienen elementos comunes. Las probabilidades de dos eventos complementarios siempre suman 1.

Eventos independientes: eventos de un experimento aleatorio en los que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

Eventos mutuamente excluyentes: eventos de un experimento aleatorio que, al no tener elementos en común, no pueden ocurrir simultáneamente.

Factorizar: reescribir una expresión algebraica o aritmética como producto de dos o más factores; por ejemplo, $x(x^2 + 1)$ es una factorización de $x^3 + x$.

Figuras congruentes: figuras que tienen la misma forma y tamaño, es decir, cuyos lados y ángulos correspondientes miden lo mismo.

Figuras homotéticas: figuras semejantes con lados correspondientes paralelos en las que las rectas que unen vértices correspondientes coinciden en un punto (el centro de homotecia).

Figuras semejantes: figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, sus ángulos correspondientes miden lo mismo y las medidas de sus lados son proporcionales.

Forma general de la ecuación de segundo grado: ecuación de segundo grado de una variable, escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: las soluciones de una ecuación cuadrática escrita en la forma general se obtienen sustituyendo los valores de a, b y c en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El signo ± indica que, por lo general, la ecuación tiene dos soluciones: una se obtiene sumando lo que está después del signo ±; la otra, restándolo.

Generatriz: segmento recto que une el vértice de un cono recto con la circunferencia de la base. Corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se gira para formar el cono.

Hipotenusa: lado más largo de un triángulo rectángulo. A diferencia de los catetos, la hipotenusa no forma el ángulo recto.

Medida de la probabilidad: número entre 0 y 1 que corresponde a la probabilidad de un evento de un experimento aleatorio.

Parábola: curva que se obtiene al hacer, en un cono, un corte transversal paralelo a su generatriz. Su ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Pendiente de una recta: medida de la inclinación de una recta en el plano cartesiano. Se denota con la letra m y corresponde al número que multiplica a la variable x en la ecuación de la recta.

Rango: diferencia entre el dato mayor y el menor de un conjunto numérico.

Razón de cambio: razón entre el cambio de la variable x y el cambio de la variable y de una relación numérica. En el caso de las ecuaciones de primer grado, la razón de cambio siempre coincide con la pendiente de la recta.

Razón trigonométrica: cociente o razón entre los lados de un triángulo rectángulo. Las tres razones trigonométricas más comunes son seno, coseno y tangente.

Sección cónica: curva que se obtiene al hacer cortes transversales en un cono. Las secciones cónicas son la parábola, la elipse y la hipérbola.

Seno de un ángulo: cociente o razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Sólido de revolución: cuerpo que se genera al girar una figura plana alrededor de un eje; por ejemplo, se obtiene un cilindro al girar un rectángulo tomando uno de sus lados como eje.

Tangente de un ángulo: cociente o razón entre el cateto opuesto a un ángulo y el cateto adyacente al mismo ángulo de un triángulo rectángulo.

Para el alumno

- **Bosch, Carlos y Claudia Gómez,** *Una ventana a las formas,* México, Santillana, 2003 (Biblioteca juvenil ilustrada).
- **Enzensberger, Hans Magnus,** *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.
- **Perero, Mariano,** *Historia e historias de matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
- **Tahan, Malba,** *El hombre que calculaba,* México, Noriega Editores, 1994.
- **VanCleave, Janice,** *Matemáticas para niños y jóvenes*, México, Limusa, 1997.

Enlaces web recomendados (consulta: noviembre de 2013)

Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
recursostic.educacion.es/descartes/web/

Cuéntame. Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía
cuentame.inegi.org.mx/

Matechavos. Proyecto para la enseñanza de las matemáticas asistida por computadora
arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/matechavos/html/index.html

Matemáticas divertidas. Juegos interactivos
www.matematicasdivertidas.com/Zonaflash/zonaflash.html

Unidades didácticas interactivas para Telesecundaria. Matemáticas 3
arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/index.html

Actividades interactivas para repasar, practicar y consolidar los conocimientos
www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/andared02/refuerzo_matematicas/indicemate.htm

Para el profesor

- **Alarcón, Jesús e Higinio Barrón,** *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio y lecturas,* México, SEP, 2001.
- ________ ***et al.***, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria,* México, SEP, 2001.
- **Ávila, Alicia y Silvia García Peña,** *Los decimales: más que una escritura,* México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **Block, David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez,** *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica,* México, Ediciones SM, 2010 (Somos Maestros).
- **Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón,** *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* México, SEP, 2000.

- **Espinosa, Hugo *et al*.,** *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 1999.
- **Fuenlabrada, Irma *et al*.,** *Juega y aprende matemáticas*, México, SEP, 1992.
- **Fonseca Cárdenas, María Teresa *et al*.,** *PISA en el aula: Matemáticas,* México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero,** *La enseñanza de la geometría,* México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **Gutiérrez Rodríguez, Ángel *et al.*,** *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas,* México, SEP, 2011.
- **Ifrah, Georges,** *Historia universal de las cifras,* 2 vols., México, SEP, 2000.
- **Itzcovich, Horacio,** *Iniciación al estudio didáctico de la geometría,* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Mochón, Simón, Teresa Rojano y Sonia Ursini,** *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con tecnología,* México, SEP, 2000.
- **Sadovsky, Patricia,** *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos,* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Sessa, Carmen,** *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas,* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Ursini, Sonia *et al.*,** *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa,* México, Trillas, 2005.

Enlaces web recomendados (consulta: noviembre de 2013)

Página de la Reforma Integral de la Educación Básica

basica.sep.gob.mx/index.html

Página de la Reforma de la Educación Secundaria

basica.sep.gob.mx/reformasecundaria/matematicas/index.htm

Habilidades Digitales para Todos. Plataforma educativa con materiales digitales

www.hdt.gob.mx/hdt/

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. Colección de aplicaciones interactivas para apoyar el aprendizaje de las matemáticas

nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html

Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas

recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_ud.php

recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_miscelanea.php

Bibliografía

DivulgaMAT. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española

www.divulgamat.net/

Educar Chile. Objetos Digitales de Aprendizaje. Cuenta con el apoyo del Ministerio de Educación de Chile

www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Eduteka. Simulaciones de matemáticas y física

www.eduteka.org/instalables.php3

Proyecto Gauss. Internet en el Aula. Ministerio de Educación de España

recursostic.educacion.es/gauss/web/indice.htm

Red Escolar ILCE

red.ilce.edu.mx/

Telesecundaria

telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/

Bibliografía consultada

- **Ávila, Alicia y Silvia García,** *Los decimales: más que una escritura*, México, INEE, 2008.
- **Block, David,** *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* (tesis), Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, 2001.
- ______ **,** *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria* (tesis), Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, 1987.
- **Centeno Pérez, Julia,** *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis, 1997.
- **Fernández, Manolo *et al.*,** *Circulando por el círculo,* Madrid, Síntesis, 1996.
- **Godino, Juan y María del Carmen Batanero,** *Azar y probabilidad,* Madrid, Síntesis, 1996.
- **García, Silvia y Olga López,** *La enseñanza de la geometría,* México, INEE, 2008.
- **Sanchez, Ernesto *et al.*,** *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas,* México, SEP, 2011.

Créditos iconográficos

© Thinkstock: pp. 16-17, 72, 124, 162, 212, 229, 243, 246.
© Other Images: pp. 76-77, 110.
© Carlos Vargas: pp. 216-217, 226-227.
© Archivo SM: p.p. 164-165
© Francisco Palma: pp. 114-115.
© Geogebra: pp. 250-251